



# Stabilité et analyse non-linéaire du contact rotor-stator

Nicolas Lesaffre

## ► To cite this version:

Nicolas Lesaffre. Stabilité et analyse non-linéaire du contact rotor-stator. Mécanique [physics.med-ph]. Ecole centrale de lyon, 2007. Français. NNT: . tel-01375079

**HAL Id: tel-01375079**

**<https://theses.hal.science/tel-01375079>**

Submitted on 2 Oct 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution| 4.0 International License

**THÈSE**

Présentée pour l'obtention du titre de

**DOCTEUR**

DE

**L'ÉCOLE CENTRALE DE LYON**

SPÉCIALITÉ MÉCANIQUE

ÉCOLE DOCTORALE DE MÉCANIQUE DE LYON (UCBL/INSA/ECL)

par

**Nicolas LESAFFRE**

**STABILITÉ ET ANALYSE NON-LINÉAIRE DU CONTACT ROTOR -  
STATOR**

Soutenue publiquement le 21 septembre 2007 devant le jury :

MM.	<b>S. BELLIZZI</b> , Chargé de Recherche HDR, LMA, Marseille	Rapporteur
	<b>P. CARTRAUD</b> , Professeur, GÉM, Ecole Centrale de Nantes	Rapporteur
	<b>F. GARCIN</b> , Expert adjoint métier mécanique, Snecma	Examineur
	<b>D. MAZUYER</b> , Professeur, LTDS, Ecole Centrale de Lyon	Président
	<b>J-J. SINO</b> , Maître de Conférences, LTDS, Ecole Centrale de Lyon	Co-encadrant
	<b>F. THOUVEREZ</b> , Professeur, LTDS, Ecole Centrale de Lyon	Directeur de thèse



# Résumé

La recherche de rendements toujours plus grands, pousse les constructeurs de turboréacteurs à adopter des configurations où les aubes des parties tournantes sont extrêmement proches du carter en vis-à-vis, augmentant par la même occasion le risque de prise de contact entre le rotor et le stator des moteurs. Ces contacts sont générateurs d'instabilités et de comportements chaotiques provoquant des charges transitoires importantes sur les aubes qui peuvent alors dépasser leur limite d'endurance et conduire à l'endommagement des machines. Il est donc primordial d'identifier et de caractériser les instabilités résultant de ces prises de contact ainsi que les paramètres influents sur la naissance de ces phénomènes. Dans cette étude, des modèles simples d'interaction entre des aubes tournantes et un anneau élastique seront développés dans le repère lié aux aubes afin d'appréhender la phénoménologie du contact entre rotor et stator. Des instabilités de types divergence où coalescence de modes seront ainsi mises en évidence. Les vitesses critiques associées à ces phénomènes seront également déterminées en fonction des paramètres structuraux du système. Le rôle du frottement entre les structures sera lui aussi déterminé et la dynamique du système résultant de ces interactions sera analysée, par des méthodes temporelles et fréquentielles. Enfin, un modèle complet de rotor flexible aubagé sera développé dans le repère corotationnel. Celui-ci permettra tout d'abord de réaliser simplement des études de stabilité pour une structure tournante possédant des dissymétries. Puis, l'interaction de ce modèle, suite à une excitation par balourd ou par un choc, avec un carter élastique sera analysée. Des instabilités seront également mises en évidence et corrélées avec les modèles phénoménologiques développés précédemment. Des exemples de configurations statiques adoptées par le système, couplé par des contacts sur certaines aubes et où seule la dynamique du carter répond, seront détaillés. D'autres régimes, cette fois-ci dynamiques, dans le cas où la dynamique du disque aubagé intervient, seront également obtenus. Enfin, des comportements chaotiques du système, en présence de frottement, seront exhibés.

## Mots Clés :

Machines tournantes, contacts rotor/stator, stabilité, divergence, couplage de modes, frottement, chaos.



# Abstract

Nowadays, more than ever, turbomachinery designers seek for increase the efficiency of their machines what could result in a loss of weight and a decrease in fuel consumption. The efficiency of jet engines depends strongly on the clearance between the rotating and stationary parts : the wider the clearance, the less efficient the machine. Hence it is desirable to reduce the clearance by as much as possible. However, reduced clearances increase the possibility of violent contacts between rotor and stator. Unfortunately this case of contact is highly harmful to such machines. As a matter of fact, under certain conditions it can generate instabilities or chaotic behaviours of the rotating parts. The large amplitude vibrations that result may damage severely the engine. Thus, it is fundamental for Turbomachinery firms to better understand the leading phenomenon responsible for the instability of the structure resulting from rotor-stator contacts. In this study, simple models of an elastic ring excited by rotating beams are developed, in the rotating frame, in order to understand the phenomenology associated with blade-casing interaction. Divergence instabilities as well as mode coupling instabilities will thus be underlined. The associated critical speeds will be expressed analytically as a function of the structure parameters. The influence of rubbing will also be determined and the behaviour of the system resulting from this interaction will be studied through time integrations and frequency methods. Finally, a complete model of a flexible bladed-rotor will be developed in the rotating frame too. Stability analysis of such a rotating structure will be made easily in the case of asymmetric rotating parts. Then the interaction between this bladed-rotor and an elastic casing resulting from an unbalance mass or from a shock on the stator will be analysed. Instabilities will also be underlined and correlated with those obtained when using the simple models. Cases where the dynamics of the stator drives the behaviour of the structure, resulting in static configurations where contacts are maintained between only some particular blades and the casing will be shown. When the dynamics of the bladed-disk plays a role in the dynamics of the structure, dynamic configurations will be underlined. Finally, chaotic behaviours of the system will be obtained in case of rubbing between the blades of the rotor and the casing.

## Keywords :

Rotating machinery, rotor/stator contacts, stability, divergence, mode couplings, rubbing, chaos.

# Remerciements

Mes premiers remerciements s'adressent à M. Sergio Bellizzi du LMA de Marseille et à M. Patrice Cartraud de l'Ecole Centrale de Nantes qui ont accepté la lourde tâche de rapporter mes travaux de thèse. Je remercie également M. François Garcin de Snecma et M. Denis Mazuyer du LTDS d'avoir bien voulu faire partie de mon jury en tant qu'examineur et président respectivement.

Je remercie particulièrement M. Fabrice Thouverez de m'avoir proposé ce sujet qui m'a passionné pendant trois ans. En tant que directeur de thèse je lui suis reconnaissant de m'avoir toujours conseillé avec rigueur et attention.

Merci également à M. Jean-Jacques Sinou pour toute son aide, aussi bien dans le contexte de mes travaux que dans la vie de tous les jours.

Enfin, j'adresse un grand merci aux membres de l'équipe D2S, permanents et collègues thésards ainsi qu'à M. Jean-Pierre Laîné qui a su me faire profiter de sa grande expérience. Je n'oublierai pas de mentionner Melle Isabelle Tixier, M. Stéphane Lemahieu, M. Olivier Barreille, M. Lionel Charles ainsi que M. Bernard Jean-Pierre avec qui j'ai pu partager d'excellents moments.

Pour terminer, je tiens à remercier mon épouse qui m'a soutenu tout au long de ces travaux.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Dynamique des machines tournantes</b>	<b>5</b>
1.1 Présentation d'un turboréacteur . . . . .	5
1.2 Modélisation de la dynamique d'un corps élastique continu . . . . .	8
1.2.1 Cinématique d'une particule d'un système continu . . . . .	8
1.2.2 Dynamique d'un corps élastique . . . . .	10
1.3 Phénoménologie des machines tournantes . . . . .	13
1.3.1 Types d'excitation . . . . .	14
1.3.2 Notion de vitesse critique . . . . .	15
1.3.3 Influence des dissymétries . . . . .	15
1.3.4 Repère fixe - repère tournant . . . . .	17
1.3.5 Causes d'instabilité . . . . .	20
1.4 Conclusion . . . . .	23
<b>2 Modélisations du contact rotor - stator</b>	<b>25</b>
2.1 Mécanique du contact . . . . .	25
2.1.1 Définition de systèmes élastiques en contact . . . . .	25
2.1.2 Loi de contact unilatéral . . . . .	25
2.1.3 Loi de frottement . . . . .	26
2.1.4 Prise en compte du frottement . . . . .	27
2.1.5 Méthodes de gestion du contact . . . . .	32
2.2 Etat de l'art du contact rotor/stator . . . . .	35
2.3 Conclusion . . . . .	39

---

<b>3</b>	<b>Estimation du comportement non linéaire</b>	<b>41</b>
3.1	Méthodes temporelles . . . . .	42
3.1.1	Les intégrateurs temporels . . . . .	42
3.1.2	La méthode de shooting . . . . .	48
3.2	Méthodes fréquentielles . . . . .	50
3.2.1	Méthode de la balance harmonique . . . . .	51
3.2.2	Méthode de collocation trigonométrique . . . . .	54
3.3	Les techniques de continuations . . . . .	55
3.3.1	La paramétrisation . . . . .	56
3.3.2	Les prédicteurs . . . . .	60
3.3.3	Les correcteurs . . . . .	64
3.3.4	Gestion du pas . . . . .	66
3.4	Validation des algorithmes . . . . .	67
3.4.1	Modèle de référence . . . . .	67
3.4.2	Intégrations temporelles et procédure de gestion du contact . . . . .	68
3.4.3	Approche par méthode de balance harmonique . . . . .	74
3.4.4	Approche par méthode de shooting . . . . .	77
3.5	Conclusion . . . . .	80
<b>4</b>	<b>Etude de stabilité non linéaire</b>	<b>81</b>
4.1	Les types de solutions . . . . .	82
4.2	Définitions et notions de stabilité globale . . . . .	82
4.3	Stabilité locale des points d'équilibre . . . . .	83
4.4	Bifurcations locales de points fixes . . . . .	86
4.5	Stabilité locale des solutions périodiques . . . . .	89
4.6	Bifurcations locales de solutions périodiques . . . . .	96
4.7	Etude de stabilité locale dans le domaine fréquentiel . . . . .	99
4.8	Validation de l'étude de stabilité selon la théorie de Floquet . . . . .	104
4.9	Conclusion . . . . .	105

<b>5</b>	<b>Modèles phénoménologiques de contact rotor-stator</b>	<b>107</b>
5.1	Anneau excité par des charges tournantes en contact permanent . . . . .	107
5.1.1	Modèles . . . . .	107
5.1.2	Contact sans frottement . . . . .	111
5.1.3	Contact frottant . . . . .	128
5.2	Anneau excité par des charges tournantes pouvant se détacher . . . . .	152
5.2.1	Modèles . . . . .	152
5.2.2	Comportement dynamique du système sans frottement . . . . .	154
5.2.3	Comportement dynamique du système avec frottement . . . . .	157
5.3	Conclusion . . . . .	160
<b>6</b>	<b>Modèle complet de contact rotor-stator</b>	<b>161</b>
6.1	Modèle de rotor flexible aubagé . . . . .	161
6.1.1	Formulation . . . . .	161
6.1.2	Etudes de stabilité . . . . .	164
6.2	Contact sans frottement . . . . .	170
6.2.1	Carter rigide . . . . .	170
6.2.2	Carter flexible . . . . .	175
6.3	Contact frottant . . . . .	197
6.3.1	Carter rigide . . . . .	197
6.3.2	Carter flexible . . . . .	199
6.4	Conclusion . . . . .	210
	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>211</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>215</b>
	<b>Nomenclature</b>	<b>233</b>
<b>A</b>	<b>Modèles phénoménologiques - contact permanent</b>	<b>235</b>
A.1	Energies, potentiels et travaux associés au modèle . . . . .	235
A.2	Equation matricielle . . . . .	236

<b>B Polynôme caractéristique</b>	<b>243</b>
<b>C Modèle de rotor flexible aubagé</b>	<b>245</b>
C.1 Energies, potentiels et travaux associés au modèle . . . . .	245
C.2 Equation matricielle . . . . .	248
<b>D Modèle de carter flexible</b>	<b>255</b>
D.1 Energies et potentiels associés au modèle . . . . .	255
D.2 Equation matricielle . . . . .	256

# Introduction

## Contexte industriel

Les turboréacteurs sont constitués d'un grand nombre de roues aubagées c'est-à-dire, d'aubes, ou de pâles, fixées sur un disque. Ces disques aubagés assurent le transfert d'énergie entre le moteur et l'air. En effet, la rotation de la soufflante, qui est la première roue aubagée, transmet de l'énergie à l'air et assure ainsi en partie la propulsion de l'appareil. Les compresseurs haute et basse pression transmettent eux aussi de l'énergie à l'air pour le comprimer à des conditions de pression et température optimales pour la combustion du mélange comburant/combustible. Enfin, les turbines sont à leurs tours mises en rotation par la détente de cet air chaud qui leur transmet son énergie.

Ces roues aubagées sont donc des pièces maîtresses des turboréacteurs et doivent répondre, en terme de dimensionnement, à des impératifs de performances aérodynamiques, de tenue mécanique à la rotation, à la température et à la charge aérodynamique. De plus, les causes de vibrations de ces structures sont nombreuses et ces dernières doivent cependant vibrer à des amplitudes faibles afin de conserver une durée de vie satisfaisante. Comme exemple d'excitations vibratoires on peut notamment citer l'écoulement fluide sur la structure aubagée ou encore, le contact entre les aubes et une partie fixe.

En effet, la recherche de rendements toujours plus élevés fait tendre les constructeurs vers des configurations possédant peu d'étages de compression, impliquant ainsi une masse faible mais, nécessitant des taux de compression élevés. Cet objectif peut être atteint avec des géométries où les jeux entre les aubes des parties tournantes et les parties fixes sont les plus faibles possible afin de diminuer au maximum les fuites aérodynamiques.

Ces architectures augmentent drastiquement les risques de prise de contact entre les aubages tournants et le carter en vis-à-vis. Ces contacts peuvent survenir en cours de fonctionnement normal, à cause du vieillissement du moteur, d'un léger balourd ou d'une charge de manœuvre. Ils peuvent également avoir lieu dans des conditions de fonctionnement extrêmes c'est-à-dire à un point de fonctionnement aérodynamique particulier. Lors de ces interactions, les structures peuvent devenir instables : au lieu de s'animer de mouvements vibratoires d'amplitude décroissante avec le temps, à cause de la dissipation d'énergie due au frottement, les structures entretiennent les contacts et vibrent avec des amplitudes de plus en plus fortes. Les charges transitoires alors induites peuvent dépasser les limites d'endurance des matériaux et ainsi conduire à l'endommagement du moteur. Ce phénomène est aggravé par l'utilisation



maintenant courante de disques aubagés monoblocs, où l'absence de liaisons entre les aubes et le disque se traduit par des « designs plus légers » et un amortissement plus faible.

## **Enjeux de l'étude**

A l'heure actuelle, compte tenu de sa pluridisciplinarité, le processus de dimensionnement des composants d'un moteur d'avion est itératif. Un pré dimensionnement vibratoire est effectué afin d'éviter la présence de résonances critiques dans la plage de fonctionnement du turboréacteur. L'ensemble du design est ensuite validé à la fin du cycle de conception par un essai moteur, sur lequel les amplitudes vibratoires sont mesurées. Il apparaît parfois de forts niveaux, liés soit à des résonances, soit à des instabilités vibratoires. La conception de la roue aubagée doit alors être refaite, ce qui est particulièrement long et coûteux. Le challenge industriel actuel est donc de prédire au plus tôt dans le cycle de dimensionnement les niveaux de réponse vibratoire afin de pouvoir prendre les mesures correctives qui s'imposent le plus en amont dans la conception.

Les principaux objectifs de cette étude consistent donc à identifier et à caractériser les instabilités pouvant apparaître du fait du contact entre le rotor et le stator dans les machines tournantes. Les impacts de l'apparition de ces instabilités sur le comportement dynamique non linéaire d'un turboréacteur devront alors être caractérisés afin de définir des domaines paramétriques permettant un fonctionnement « sans risque » de telles machines où le contact entre parties tournantes et parties fixes peut être présent. La mise au point d'une stratégie de simulation du comportement dynamique d'un turboréacteur en cas de contacts intermittents ou permanents entre les aubes mobiles et le carter sera un point indispensable, l'enjeu final étant de pouvoir définir, prévoir, classer et minimiser les phénomènes vibratoires préjudiciables liés à l'apparition d'instabilités et de problèmes chaotiques.

## **Organisation du document**

Dans un premier chapitre, les problématiques liées aux machines tournantes et à leur dynamique complexe seront exposées. Après une brève description d'un turboréacteur, les grandes étapes de la modélisation de la dynamique de telles structures tournantes, seront détaillées. Cette modélisation mettant en évidence des éléments propres à la dynamique des machines tournantes, la phénoménologie particulière de ce champ de la mécanique, d'ailleurs indispensable à la compréhension des notions abordées par la suite, sera alors présentée succinctement, notamment en ce qui concerne les instabilités potentielles connues.

Le cas des contacts entre les aubes mobiles et le carter fixe étant générateur du type d'instabilité qui nous intéresse, les modélisations classiques du contact rotor-stator seront développées dans un second chapitre. Tout d'abord, les bases théoriques de la mécanique du contact seront introduites puis, l'état de l'art du contact entre les parties mobiles et les parties fixes dans les machines tournantes sera fait.

Dans un troisième temps, les méthodes nécessaires à l'établissement des résultats classiques

listés lors de cet état de l'art seront développées. En effet, en fonction des régimes de fonctionnement des turbomachines, des régimes périodiques, quasi-périodiques ou chaotiques sont classiquement référencés. Des méthodes spécifiques à l'étude de ce genre de dynamique seront ainsi détaillées, dans le domaine temporel et dans le domaine fréquentiel. Celles-ci seront alors validées sur un cas de contact rotor/stator simple ayant fait l'objet de publications antérieures.

La stabilité de ces systèmes mécaniques constituant un point clé de cette thèse, les techniques d'étude classiques de la stabilité des types de solutions rencontrées dans les turbomachines seront elles aussi développées, dans le quatrième chapitre, et validées sur le cas test précédent.

Ensuite, ces méthodes d'étude de stabilité seront appliquées, dans le chapitre 5, à des modèles simples d'interaction entre des structures tournantes et une structure fixe circulaire, en vue d'appréhender les phénomènes prédominants dans l'interaction entre rotor et stator. Les résultats de ces études seront validés par des méthodes temporelles et fréquentielles, permettant par la même occasion l'étude du comportement dynamique des systèmes associés.

Enfin, dans le sixième chapitre, un modèle plus complet de rotor flexible aubagé sera développé. La stabilité de ce modèle, conçu dans le repère corotationnel sera étudiée. Puis, le contact avec un carter fixe puis flexible, sera analysé.



# Chapitre 1

## Dynamique des machines tournantes

La dynamique des machines tournantes est un domaine à part entière de la dynamique des structures. Celui-ci peut s'avérer extrêmement complexe car les systèmes tournants sont source d'une grande richesse phénoménologique. Dans ce chapitre, les systèmes tournants qui nous intéressent, à savoir, les turboréacteurs, vont être brièvement décrits. Ensuite, les bases de la modélisation de la dynamique d'un corps élastique seront présentées. Enfin, un aperçu des phénomènes caractéristiques du domaine de la dynamique des machines tournantes sera proposé.

### 1.1 Présentation d'un turboréacteur

Le turboréacteur est apparu en Europe au début du 20<sup>ième</sup> siècle. On peut citer le brevet du français Guillaume en 1921 qui proposa un turboréacteur à compresseur axial. Ce sont cependant les brevets de Sir Frank Whittle en Angleterre et du Dr. Hans von Ohain en Allemagne dans les années 1930 qui ont conduit aux premières réalisations pratiques. Ces moteurs à combustion continue marquèrent une rupture par rapport aux moteurs à pistons de l'époque, en apportant un rapport puissance/poids beaucoup plus élevé. Les premiers turboréacteurs, conçus à partir du prototype mis au point par Whittle étaient munis d'un simple compresseur centrifuge entraîné par une turbine. Ils avaient le mérite de la simplicité (un seul étage de compression, un seul arbre reliant turbine et compresseur) mais leur faible longueur s'accompagnait d'un fort diamètre. Avec une meilleure maîtrise de la métallurgie furent introduits des compresseurs axiaux combinés à des aubages fixes (stators). Du fait de leur moindre efficacité, ils nécessitaient plusieurs étages tournant à la même vitesse mais pouvaient supporter des vitesses de rotation nettement plus élevées. Dans les premiers turboréacteurs, turbine et compresseur formaient un unique ensemble cinématique. On parlait alors de moteurs simple corps.

Pour en accroître d'avantage l'efficacité, le compresseur fût divisé en deux parties successives, à basse et haute pression, entraînées par deux turbines successives haute et basse pression. Cette architecture, apparue dans les années 60, tend à se généraliser, même si certains moteurs militaires restent des monorotors. La figure 1.1 montre un moteur utilisé actuellement sur les Boeing 737. Il s'agit d'une architecture double corps, double flux. La figure 1.2 représente un schéma simplifié de ce moteur. Deux rotors indépendants peuvent être distingués (d'où la

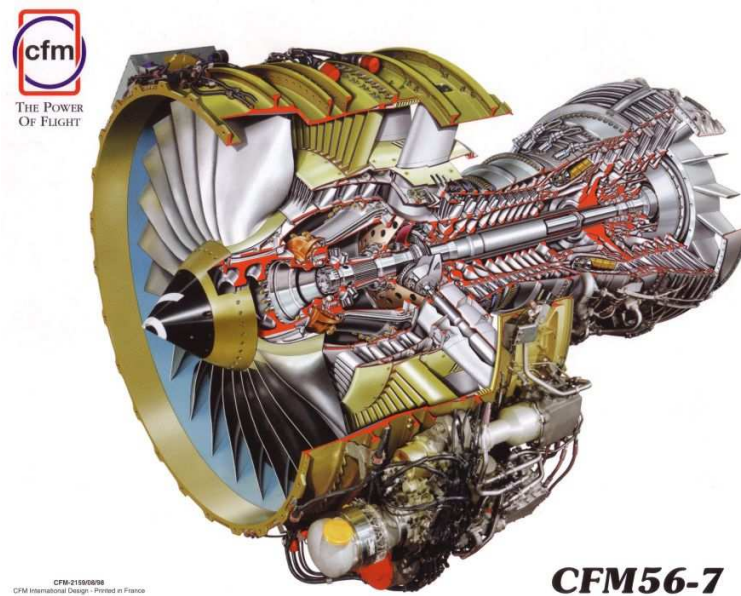


FIG. 1.1 – Exemple d'un turboréacteur CFM56-7

dénomination « double corps »). Le rotor basse pression comprend la soufflante, le compresseur basse pression et la turbine basse pression. Le rotor haute pression comprend quant à lui le compresseur haute pression et la turbine haute pression. La vitesse de rotation des deux corps est différente, nécessitant deux arbres concentriques et donc des moteurs plus longs et plus lourds. En contrepartie le rendement est nettement amélioré. Le flux d'air aspiré dans le moteur par la soufflante est séparé en un flux primaire et un flux secondaire, ce qui justifie l'expression « double flux ».

Au début du cycle de fonctionnement d'un tel moteur, l'air entre à l'avant par la soufflante, également appelée fan. Le flux est ensuite séparé en deux : une première partie, le flux primaire, va passer dans la partie interne du moteur et est destinée à participer à la combustion. Le reste, c'est-à-dire le flux secondaire contourne le moteur par sa périphérie, jusqu'à la tuyère où il est éjecté avec les gaz chauds. Le flux primaire est comprimé successivement dans les étages du compresseur basse pression puis du compresseur haute pression. Le gaz, alors à sa pression maximale, est enflammé dans la chambre de combustion. Ceci s'accompagne d'une forte hausse de la température qui atteint des valeurs de près de  $1000^{\circ}\text{C}$  ainsi que d'une faible diminution de pression. Le gaz est ensuite détendu dans les turbines. La turbine haute pression entraîne le compresseur haute pression tandis que la turbine basse pression entraîne la soufflante et le compresseur basse pression. Le flux primaire est enfin accéléré par la tuyère et fournit une partie de la poussée du moteur, le reste de la poussée étant due au flux secondaire.

Les moteurs civils tirent l'essentiel de leur poussée du flux secondaire. C'est pour cela d'ailleurs que la soufflante a un diamètre élevé (jusqu'à 3,1 m sur le moteur GE90 destiné au bimoteur gros porteur Boeing 777), avec des aubes au design particulièrement optimisé. Pour les moteurs militaires en revanche, les exigences de compacité et de rapport puissance/poids

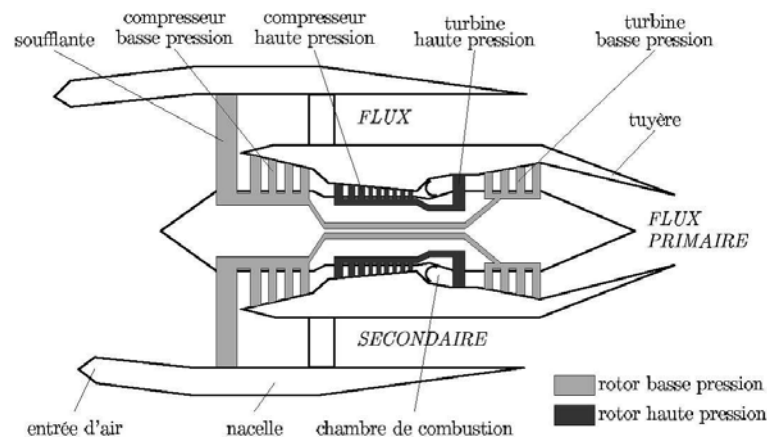


FIG. 1.2 – Coupe schématique d'un turboréacteur

conduisent à des moteurs à taux de dilution plus faible. Ce taux de dilution représente la proportion d'air ne passant que dans la soufflante. Il s'exprime par le rapport du flux froid massique (flux secondaire) sur le flux chaud massique (flux primaire). Ce taux varie en fonction des moteurs. Il est d'autant plus élevé que le moteur est destiné à voler à des vitesses faibles. Les moteurs civils sont donc conçus avec un fort taux de dilution ce qui permet de noyer le bruit du jet primaire. Par exemple, le moteur CFM56-7 de la figure 1.1 a un taux de dilution compris entre 5,1 et 5,3 suivant les configurations, alors que le moteur M88 qui équipe le Rafale possède un taux de dilution d'environ 0,3. Des moteurs à double flux permettent ainsi, pour des vitesses modérées (en dessous de Mach 1,5 environ), d'augmenter la poussée par augmentation du débit de gaz c'est-à-dire en augmentant le flux secondaire, tout en limitant la consommation de carburant et en réduisant le niveau de bruit, contrairement aux turboréacteurs à simple flux, très bruyants et qui n'atteignent leur meilleur rendement qu'au delà de Mach 1.

En raison des exigences de performance et de fiabilité, les matériaux composant le moteur sont choisis avec la plus grande attention. Les alliages de titane, en particulier le Ti-6Al-4V, ont une bonne tenue à la corrosion, une bonne tenue en température jusqu'à 600°C et un bon rapport propriétés mécaniques/densité. Ils sont utilisés massivement dans les compresseurs. Les superalliages à base de nickel, qui se caractérisent par une excellente tenue à chaud (jusqu'à 1100°C), sont employés, entre autres, dans les turbines. Ces deux classes de métaux constituent environ 75% de la masse du moteur. On assiste par ailleurs à une introduction croissante des céramiques et des matériaux composites, utilisés par exemple pour les aubes de la soufflante du moteur GE90. Les recherches récentes ont permis la réalisation sur le moteur M88 d'aubes de turbines monocristallines et de disques obtenus par métallurgie des poudres.

Vue la complexité de ces systèmes mécaniques et les performances requises, il est compréhensible que leur coût soit très élevé. En général, pour un avion civil, un moteur représente le tiers du coût de l'appareil total.

L'amélioration de la fiabilité et du rendement des turboréacteurs, depuis leurs prémisses

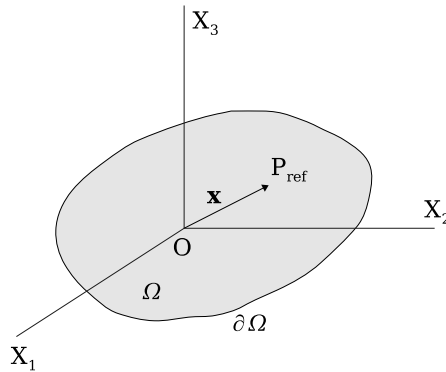


FIG. 1.3 – Configuration de référence d'un système continu

jusqu'à nos jours, s'est faite grâce à de nombreuses recherches dans divers domaines dont la mécanique des structures. Ainsi, la complexité déjà évoquée de tels systèmes, nécessite des modélisations de plus en plus complètes permettant la prise en compte de phénomènes physiques influents sur le comportement des machines tournantes. Les grandes lignes des modélisations utilisées dans le cadre qui nous intéresse sont développées dans le paragraphe suivant.

## 1.2 Modélisation de la dynamique d'un corps élastique continu

Dans ce qui suit, l'élastodynamique des systèmes continus va être abordée. Tout d'abord, la cinématique d'une particule d'un solide élastique va être décrite dans un repère à trois dimensions. Il s'agit d'une étape fondamentale de la modélisation de la dynamique d'une structure. Elle sera développée dans un cadre très général et dépourvue de toutes hypothèses simplificatrices. Ensuite, la mise en équation de la dynamique d'un corps déformable sera décrite, premièrement dans le cas général puis, une attention particulière sera portée sur une formulation discrète du problème d'élastodynamique aboutissant à l'équation matricielle du comportement dynamique d'une structure élastique.

### 1.2.1 Cinématique d'une particule d'un système continu

Avant toute chose, il convient de rappeler que, par opposition aux systèmes discrets, les systèmes continus sont composés de masses réparties et déformables, ainsi que d'éléments élastiques et dissipatifs continus et liés en général directement aux propriétés constitutives des masses associées.

Considérons un corps déformable occupant le volume  $\Omega$  de frontière  $\partial\Omega$  dans sa configuration non déformée de référence (Cf. figure 1.3). Toute particule  $P_{ref}$  de ce solide peut être repérée par un vecteur « lieu »  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]^T$ , dans un repère inertiel orthonormé  $O(X_1, X_2, X_3)$  [30].

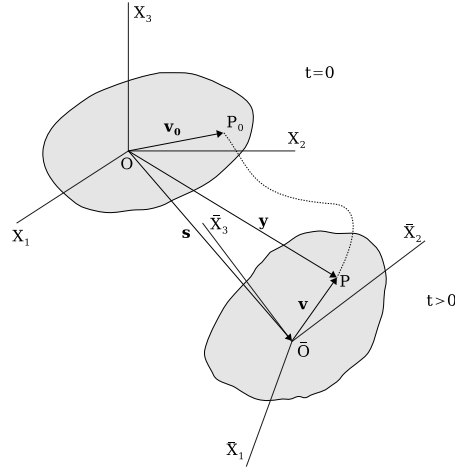


FIG. 1.4 – Configuration déformée d'un système continu

A l'instant initial, cette particule est située au point initial  $P_0$  de vecteur position :

$$\mathbf{v}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \quad (1.1)$$

où  $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$  est le vecteur déplacement initial.

Considérons maintenant qu'à l'instant  $t > 0$ , le corps soit déplacé, comme illustré par la figure 1.4. La particule est alors déplacée elle aussi au point  $P$  de vecteur lieu  $\mathbf{y}(\mathbf{x}, t)$ , sous l'effet du mouvement propre du corps ainsi qu'à cause de sa déformation. Dans cette configuration déformée, cette particule peut également être identifiée dans un repère orthonormé lié au solide  $\bar{O}(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3)$ . Dans celui-ci (confondu avec le repère inertiel à l'instant  $t = 0$ ), le vecteur position de  $P$  peut s'écrire :

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \quad (1.2)$$

où  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  est le vecteur déplacement à l'instant  $t$  résultant de la déformation dynamique du corps.

En toute généralité, nous admettons que le repère lié au solide se déduit du repère inertiel par une translation de vecteur  $\mathbf{s}(t)$  et une rotation autour d'un axe quelconque de vecteur vitesse angulaire  $\boldsymbol{\omega}(t) = [\omega_1, \omega_2, \omega_3]^T$ , les composantes de cette vitesse étant définies dans le repère lié, dit encore « corotationnel ».

Ainsi, conformément à la figure 1.4, dans le repère inertiel, le vecteur  $\mathbf{y}(\mathbf{x}, t)$  est donné par :

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{s}(t) + \mathbf{R}(t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{s}(t) + \mathbf{R}(t) (\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) \quad (1.3)$$

où  $\mathbf{R}(t)$  est une matrice de changement de repère. Ses colonnes sont les vecteurs de base du repère corotationnel exprimés dans le repère fixe. Celle-ci est orthogonale ( $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}$  et



$\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$ ), où  $\mathbf{I}$  désigne la matrice identité d'ordre 3.

Puisque nous nous intéressons à la dynamique d'une particule, il est nécessaire de définir sa vitesse et son accélération. Ainsi, la dérivée temporelle de  $\mathbf{y}(\mathbf{x}, t)$ , qui n'est autre que la vitesse absolue de la particule  $P$ , mesurée dans le référentiel corotationnel, est :

$$\dot{\mathbf{y}} = \dot{\mathbf{s}} + \dot{\mathbf{R}}(\mathbf{x} + \mathbf{u}) + \mathbf{R}\dot{\mathbf{u}} \quad (1.4)$$

où  $\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{R}\boldsymbol{\Omega}$  est la dérivée temporelle de  $\mathbf{R}$ , avec  $\boldsymbol{\Omega}$  donnée par une matrice antisymétrique définie par les composantes de  $\omega$  :

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

En ce qui concerne l'accélération de la particule, elle s'obtient par différenciation de sa vitesse par rapport au temps et s'exprime par :

$$\mathbf{R}^T \ddot{\mathbf{y}} = \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{R}^T \ddot{\mathbf{s}} + \dot{\omega} \wedge (\mathbf{x} + \mathbf{u}) + \omega \wedge [\omega \wedge (\mathbf{x} + \mathbf{u})] + 2\omega \wedge \dot{\mathbf{u}} \quad (1.6)$$

Une fois la position, la vitesse et l'accélération de la particule déterminées, son équation d'équilibre peut être exprimée.

### 1.2.2 Dynamique d'un corps élastique

Les équations d'équilibre de l'élastodynamique d'un corps déformable peuvent être établies à partir des équations classiques de l'élastostatique linéaire, en équilibrant, sur un volume infinitésimal du corps, les forces élémentaires soit, les efforts internes, les forces volumiques, les forces d'inertie et les forces de dissipation, dans la configuration de référence du système. Pour aller plus loin, il est nécessaire de considérer une loi de comportement de type viscoélastique pour le matériau constituant le corps déformable c'est-à-dire une relation entre le vecteur  $\sigma$  associé au tenseur des contraintes et le vecteur  $\epsilon$  lié au tenseur des déformations :

$$\sigma(\mathbf{x}, t) = \mathbf{C}(\mathbf{x}) [\epsilon(\mathbf{x}, t) + \eta_b(\mathbf{x}) \dot{\epsilon}(\mathbf{x}, t)] \quad (1.7)$$

Dans cette relation,  $\mathbf{C}(\mathbf{x})$  est la matrice d'élasticité, le matériau étant supposé posséder des propriétés élastiques linéaires et  $\eta_b(\mathbf{x})$ , le coefficient d'amortissement interne visqueux.

De plus, si ce dernier est isotrope, il suit la loi de Hooke généralisée. Généralement, l'hypothèse dite des petites perturbations est considérée. Selon celle-ci, les déformations du corps déformable restent faibles, ce qui permet de considérer une relation géométrique linéaire entre déformations et déplacements :

$$\epsilon(\mathbf{x}, t) = \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \quad (1.8)$$

où  $\nabla$  représente l'opérateur différentiel suivant :

$$\nabla = \begin{bmatrix} \partial/\partial x_1 & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial x_2 & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial x_3 \\ 0 & \partial/\partial x_3 & \partial/\partial x_2 \\ \partial/\partial x_3 & 0 & \partial/\partial x_1 \\ \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

Une fois les conditions limites du problème ainsi que ses conditions initiales définies, la mise en équation de celui-ci est complète. Cette façon de procéder aboutit à la formulation forte du problème d'élastodynamique. Celle-ci sera détaillée plus loin, au chapitre 2, en section 2.1.4. Il est difficile de résoudre un problème ainsi formulé. Une alternative consiste à affaiblir cette formulation, c'est-à-dire à chercher des solutions approchées, moins restrictives (méthode de Rayleigh-Ritz, méthode des éléments finis, ...).

Nous allons nous placer dans un cas discret. On peut alors montrer que le principe d'Hamilton revient à écrire les équations de Lagrange associées à notre problème [35]. Nous allons procéder de la sorte pour obtenir la formulation faible discrète d'un problème d'élastodynamique.

Les équations de Lagrange peuvent s'écrire comme suit :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial F_d}{\partial \dot{q}} = 0 \quad (1.10)$$

Dans cette équation,  $L$  est le Lagrangien du système et est égal à l'énergie cinétique du système  $T$ , diminuée de l'énergie potentielle  $U$ .  $F_d$  est une fonction de dissipation qui rend compte de l'amortissement de la structure.

En utilisant l'expression de la vitesse d'une particule exprimée dans le repère corotationnel (Cf. équation 1.4), l'énergie cinétique de la structure complète s'exprime d'une manière générale par :

$$\begin{aligned} T = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{y}}^T \dot{\mathbf{y}} d\Omega &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{u}}^T \boldsymbol{\Omega} \mathbf{u} d\Omega - \\ &\frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \mathbf{u}^T \boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{u} d\Omega - \int_{\Omega} \rho \mathbf{u}^T \boldsymbol{\Omega} (\mathbf{R}^T \dot{\mathbf{s}} + \boldsymbol{\Omega} \mathbf{x}) d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{u}}^T (\mathbf{R}^T \dot{\mathbf{s}} + \boldsymbol{\Omega} \mathbf{x}) d\Omega + \\ &\frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho (\dot{\mathbf{s}}^T \dot{\mathbf{s}} + 2 \dot{\mathbf{s}}^T \mathbf{R} \boldsymbol{\Omega} \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{x}) d\Omega \quad (1.11) \end{aligned}$$

Quant à l'énergie potentielle, elle regroupe l'énergie de déformation et le travail virtuel des forces volumiques  $\mathbf{f}$  et surfaciques  $\mathbf{t}$  et s'exprime par :

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon^T \mathbf{C} \varepsilon d\Omega - \left( \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{f} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{t} d(\partial\Omega) \right) =$$

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{u})^T \mathbf{C} (\nabla \mathbf{u}) d\Omega - \left( \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{f} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{t} d(\partial\Omega) \right) \quad (1.12)$$

Enfin, la fonction de dissipation s'exprime par :

$$F_d = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \eta_b (\nabla \dot{\mathbf{u}})^T \mathbf{C} (\nabla \dot{\mathbf{u}}) d\Omega \quad (1.13)$$

Dans l'approche que nous développons, des déplacements approchés  $\mathbf{u}^h$  de  $\mathbf{u}$  sont recherchés. Dans un cas discret, ils sont considérés comme étant une combinaison linéaire de fonctions spatiales, dites fonctions de Ritz, pondérées par des fonctions temporelles. Ces fonctions de Ritz tentent de représenter au mieux les déformées de la structure et doivent nécessairement vérifier les conditions cinématiques du problème considéré. Cette approche est couramment appelée approximation de Rayleigh-Ritz.

Ces déplacements approchés s'expriment donc par  $\mathbf{u}^h(\mathbf{x}, t) = \mathbf{H}(\mathbf{x}) \mathbf{q}(t) \approx \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  où  $\mathbf{H}(\mathbf{x})$  contient les fonctions de Ritz et où les composantes de  $\mathbf{q}(t)$  sont dénommées degrés de liberté généralisés. Les énergies et fonction de dissipation précédentes sont alors données par les expressions suivantes :

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{G} \mathbf{q} - \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{N} \mathbf{q} - \mathbf{q}^T \int_{\Omega} \rho \mathbf{H}^T \boldsymbol{\Omega} (\mathbf{R}^T \dot{\mathbf{s}} + \boldsymbol{\Omega} \mathbf{x}) d\Omega +$$

$$\dot{\mathbf{q}}^T \int_{\Omega} \rho \mathbf{H}^T (\mathbf{R}^T \dot{\mathbf{s}} + \boldsymbol{\Omega} \mathbf{x}) d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho (\dot{\mathbf{s}}^T \dot{\mathbf{s}} + 2 \dot{\mathbf{s}}^T \mathbf{R} \boldsymbol{\Omega} \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \boldsymbol{\Omega} \mathbf{x}) d\Omega \quad (1.14)$$

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} - \left( \mathbf{q}^T \int_{\Omega} \mathbf{H}^T \mathbf{f} d\Omega + \mathbf{q}^T \int_{\partial\Omega} \mathbf{H}^T \mathbf{t} d(\partial\Omega) \right) \quad (1.15)$$

$$F_d = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}} \quad (1.16)$$

Enfin, l'application des équations de Lagrange aux expressions précédentes conduit à l'équation matricielle du comportement dynamique du système dans le repère mobile :

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{D} + \mathbf{G}) \dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K} + \mathbf{P} + \mathbf{N}) \mathbf{q} = \mathbf{r} + \mathbf{F} \quad (1.17)$$

où  $\mathbf{M}$  est la matrice de masse,  $\mathbf{D}$  la matrice d'amortissement,  $\mathbf{G}$  la matrice gyroscopique,  $\mathbf{K}$  la matrice de raideur,  $\mathbf{P}$  la matrice d'accélération angulaire,  $\mathbf{N}$  la matrice d'accélération centrifuge (ou assouplissement centrifuge),  $\mathbf{r}$  le vecteur des excitations indirectes dues à l'entraînement du

système de coordonnées et  $\mathbf{F}$  le vecteur des excitations par les forces volumiques et surfaciques. Les expressions détaillées de chacun des éléments de l'équation 1.17 sont les suivantes :

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega} \rho \mathbf{H}^T \mathbf{H} d\Omega \quad (1.18)$$

$$\mathbf{D} = \int_{\Omega} \eta_b (\nabla \mathbf{H})^T \mathbf{C} (\nabla \mathbf{H}) d\Omega \quad (1.19)$$

$$\mathbf{G} = 2 \int_{\Omega} \rho \mathbf{H}^T \boldsymbol{\Omega} \mathbf{H} d\Omega \quad (1.20)$$

$$\mathbf{P} = \int_{\Omega} \rho \mathbf{H}^T \dot{\boldsymbol{\Omega}} \mathbf{H} d\Omega \quad (1.21)$$

$$\mathbf{N} = \int_{\Omega} \rho \mathbf{H}^T \boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{H} d\Omega \quad (1.22)$$

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{H})^T \mathbf{C} (\nabla \mathbf{H}) d\Omega \quad (1.23)$$

$$\mathbf{r} = - \int_{\Omega} \rho \mathbf{H}^T \left( \mathbf{R}^T \ddot{\mathbf{s}} + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \mathbf{x} + \boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{x} \right) d\Omega \quad (1.24)$$

$$\mathbf{F} = \int_{\Omega} \mathbf{H}^T \mathbf{f} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \mathbf{H}^t d(\partial\Omega) \quad (1.25)$$

Il est utile de préciser que les matrices  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{N}$  sont symétriques alors que  $\mathbf{G}$  et  $\mathbf{P}$  sont antisymétriques.

De plus, les matrices  $\mathbf{G}$  et  $\mathbf{N}$  sont caractéristiques des machines tournantes et, y compris dans le cas de structures en rotation à vitesse constante, elles sont à l'origine de nombreux phénomènes propres au rotor, tels entre autres, la dépendance des fréquences propres d'un système avec sa vitesse de rotation. Ses phénomènes spécifiques vont être décrits dans la partie suivante.

### 1.3 Phénoménologie des machines tournantes

Comme on l'a vu dans la partie précédente, l'équation du comportement dynamique d'un corps élastique animé d'un mouvement de rotation, exprimée dans le repère corotationnel, fait apparaître des matrices caractéristiques des machines tournantes. En effet, comme nous le verrons, celles-ci sont le siège de phénomènes particuliers du fait de leur rotation propre. Il est primordial d'avoir connaissance des caractéristiques fondamentales de telles structures pour comprendre la suite de l'étude et surtout afin d'en appréhender tout l'enjeu.

### 1.3.1 Types d'excitation

La dynamique des machines tournantes est un domaine complexe de la mécanique qui présente une phénoménologie très riche à cause des effets centrifuges et gyroscopiques agissant sur les masses et les inerties en rotation.

Les sources d'excitation des moteurs d'avion sont multiples et variées. Dans ce paragraphe, seules les plus fréquentes seront abordées.

Tout d'abord, le balourd dynamique constitue l'une des causes d'excitation les plus « classiques » des machines tournantes. Celui-ci résulte du mouvement rotatif des masses excentrées du rotor par rapport à son axe de rotation induisant alors des forces. De même, une pièce en rotation autour d'un axe autre qu'un de ses axes principaux d'inertie est soumise à un moment.

En écrivant l'énergie cinétique d'une masse  $m_u$  excentrée par rapport au centre géométrique du rotor d'une distance  $r$ , on peut, après avoir appliqué les équations de Lagrange, obtenir l'expression des forces dues à ce balourd dans le repère orthonormé fixe :

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} = m_u r \Omega^2 \begin{bmatrix} \cos(\Omega t + \alpha) \\ \sin(\Omega t + \alpha) \end{bmatrix} \quad (1.26)$$

$\alpha$  étant l'angle entre la position de la masse  $m_u$  et l'axe des abscisses dans le repère fixe et  $\Omega$ , la vitesse de rotation constante du rotor.

L'existence d'un balourd peut avoir plusieurs causes. Tout d'abord, lors de la fabrication des pièces du rotor, un problème d'usinage ou d'assemblage peut engendrer un balourd résiduel. Des gradients thermiques peuvent également gauchir des pièces ou faire fléchir l'arbre engendrant là encore un balourd qu'il est primordial d'amoindrir. Pour cela, les constructeurs s'imposent des tolérances très sévères de même que des équilibrages intermédiaires à chaque étape du processus de fabrication des parties tournantes. Ces équilibrages consistent en l'ajout de masses ponctuelles afin de minimiser le balourd résiduel.

Un balourd peut également survenir en condition de fonctionnement. Par exemple, l'ingestion de grêlons ou d'oiseaux peut causer en premier lieu des dégâts légers sur certaines aubes de la soufflante créant ainsi un déséquilibre plus ou moins important du rotor. Le cas de dommages importants des aubes peut s'illustrer par la perte de certaines d'entre elles causant alors un balourd très important. Dans ce cas, compte tenu des vitesses de rotation élevées et des masses importantes mises en jeu, l'énergie libérée par une perte d'aube est colossale et il est fondamental d'assurer la sécurité des passagers de l'avion en dimensionnant le carter de telle sorte qu'il contienne les débris.

Une autre source d'excitation des moteurs d'avions est le couplage aéroélastique. Bien que les résultantes fluides ne soient pas prises en compte dans l'étude de la dynamique d'ensemble des moteurs, celle-ci est à l'origine de nombreux phénomènes dont certains restent encore à étudier. Ainsi, les composants du turboréacteur se trouvent excités par l'écoulement d'air traversant ce dernier. Cependant, il existe de nombreux obstacles à cet écoulement tels que les

redresseurs ou les raidisseurs. L'excitation est alors proportionnelle à la vitesse de rotation du moteur multipliée par le nombre d'obstacles. De plus, l'écoulement d'air autour des pièces peut engendrer, par couplage aéroélastique, des instabilités de type flottement, dont l'étude peut s'avérer coûteuse.

### 1.3.2 Notion de vitesse critique

L'excitation mécanique principale des rotors étant, comme nous venons de le voir, une excitation synchrone due au balourd, il faut s'attendre à une résonance des parties tournantes à certaines vitesses de rotation. C'est précisément ce que caractérise la vitesse critique d'une structure en rotation.

Tout d'abord, il faut savoir que les modes propres d'un système soumis à des effets gyroscopiques sont complexes et deux à deux conjugués. Ceci provient du couplage entre déplacements verticaux et horizontaux par ces effets gyroscopiques [30, 7]. De plus, ils sont à l'origine de la dépendance des pulsations propres de la structure avec la vitesse de rotation. D'une manière générale, la dépendance est d'autant plus forte que le rotor possède une inertie polaire importante. Il est possible, en combinant les modes propres de cette structure, d'exhiber deux types de modes, un premier dit direct et un second dit rétrograde. Physiquement, cela se manifeste par un mode du rotor caractérisé par un mouvement de précession dans le même sens que celui de sa rotation propre dans le cas du mode direct et, un mouvement de précession dans le sens contraire à sa rotation propre dans le cas du mode rétrograde. Ainsi, si on représente l'évolution des fréquences propres d'un rotor en fonction de sa vitesse de rotation, dans un graphe communément dénommé Diagramme de Campbell [49], un mode double, dans le cas d'une structure parfaitement symétrique va voir sa pulsation se dédoubler lorsque la vitesse de rotation augmente, comme le montre la figure 1.5. Dans le repère fixe, la courbe de pente positive représente le mode direct. Celui-ci est donc rigidifié lorsque la vitesse de rotation augmente. La courbe de pente négative, quant à elle, représente le mode rétrograde qui est assouplit lorsque la rotation s'accélère.

Lorsque la fréquence d'excitation synchrone coïncide avec la fréquence d'un des modes propres, il y a résonance du rotor qui correspond alors à la notion de vitesse critique. Cependant, dans le cas de structures linéaires parfaitement symétriques, seul le mode direct répond. Par contre, une perte de symétrie sur le stator ou encore des non linéarités (frottement, ...), peuvent générer, comme nous le verrons ultérieurement, une réponse significative du mode rétrograde. Il est possible de tracer d'autres courbes d'excitation sur le diagramme de Campbell, telles les courbes  $f = n\Omega$  et  $f = \Omega/n$  afin de déterminer les éventuelles résonances associées aux excitations aérodynamiques ou à des non linéarités.

### 1.3.3 Influence des dissymétries

Dans le cas idéal, les rotors sont supposés être axisymétriques. Pratiquement, ce n'est pas toujours le cas. Des dissymétries peuvent provenir des parties tournantes elles mêmes ou alors des parties liant le rotor aux parties fixes (stator). La dynamique d'une telle structure présente

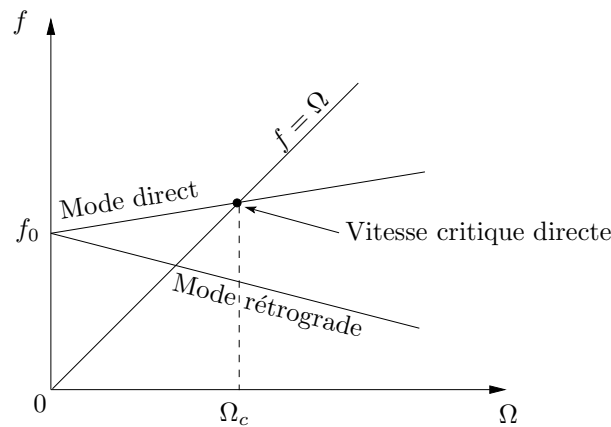


FIG. 1.5 – Diagramme de Campbell d'un rotor axisymétrique dans le repère fixe

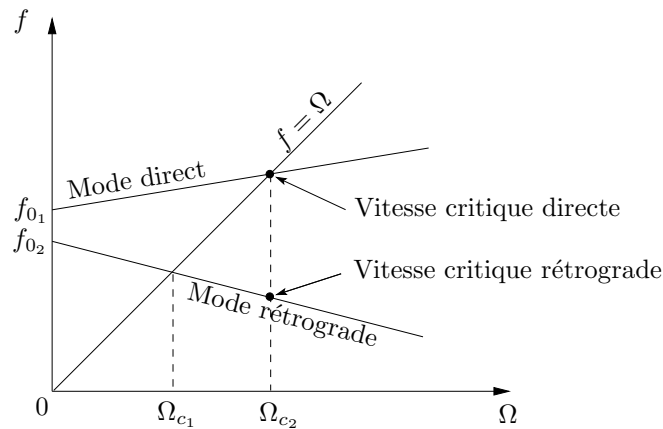


FIG. 1.6 – Diagramme de Campbell, dans le repère fixe, d'un rotor possédant des parties fixes dissymétriques

des particularités qu'il est bon de préciser.

Contrairement au cas présenté sur la figure 1.5, où le rotor possède des modes doubles à vitesse de rotation nulle c'est-à-dire des modes verticaux et horizontaux ayant la même fréquence propre, un rotor dissymétrique aura, à l'arrêt, des modes différents dans ces deux directions avec des fréquences distinctes. L'évolution de la vitesse de rotation donne néanmoins toujours l'apparition d'un mode direct et d'un mode rétrograde, comme le montre le figure 1.6, dans le cas d'un rotor possédant des parties fixes dissymétriques. S'il s'agit du rotor qui possède des parties tournantes non symétriques, un diagramme de Campbell « équivalent » peut être tracé dans le repère tournant (Cf. section 1.3.4).

Dans le cas où la dissymétrie provient des paliers du rotor, plus précisément dans le cas où ceux-ci possèdent des raideurs transversales différentes dans les deux directions principales, il

est assez intuitif de comprendre que les orbites de ce dernier lors d'une réponse à une excitation synchrone ne sont plus circulaires mais elliptiques. Ceci a pour conséquence de solliciter l'arbre en fatigue puisqu'il subit alors des contraintes axiales normales alternées. De plus, à la différence du cas axisymétrique, le mode rétrograde peut être excité par un balourd. Une réponse à balourd d'un tel système présente donc deux pics de résonance qui correspondent à une vitesse critique directe et à une vitesse critique rétrograde (Cf. figure 1.6). Il s'avère que le rotor peut être animé d'un mouvement de précession rétrograde au voisinage de sa première vitesse critique, et d'un mouvement de précession direct ailleurs [49].

Dans le cas où la dissymétrie provient des parties tournantes elles mêmes, des zones d'instabilité peuvent exister. Ce peut être le cas de rotors à deux ou trois aubes ayant des inerties considérables, telles des éoliennes. Les équations du comportement dynamique de ce genre de système font apparaître des termes de raideur dépendant du temps. Ce genre d'équations est dénommé équations de Mathieu. D'une manière générale, les zones d'instabilité ont lieu au tiers, à la moitié et à la première vitesse critique du rotor dissymétrique avec un mouvement de tournoiement synchrone [23].

### 1.3.4 Repère fixe - repère tournant

La modélisation des structures tournantes peut se faire, comme nous l'avons évoqué, dans deux repères : le repère fixe et le repère corotationnel. Ces deux modélisations présentent chacune des avantages et des inconvénients en fonction des dissymétries de la structure. En effet, la modélisation d'une structure possédant des éléments asymétriques en rotation par rapport au repère considéré, présente des termes dépendant du temps et par extension, des matrices à termes périodiques. On peut, à titre d'exemple immédiat, remarquer que les forces dues au balourd (Cf. équation 1.26) possèdent des termes temporels en  $\Omega t$  alors que dans le repère corotationnel cette dépendance disparaît. Cette présence de matrices à termes périodiques limite généralement les méthodes d'analyse. Il est donc plus judicieux d'adopter le référentiel dans lequel les parties dissymétriques sont fixes. Ainsi, les structures possédant des parties tournantes symétriques sont préférentiellement modélisées dans le repère tournant alors que les structures possédant des parties fixes dissymétriques sont modélisées dans le repère fixe. Les structures parfaitement symétriques peuvent être modélisées indifféremment dans l'un ou l'autre des deux repères alors qu'une structure complètement dissymétrique possédera de toutes façons des matrices à termes périodiques.

Les modélisations obtenues dans ces repères possèdent certaines différences. Afin d'illustrer ce propos, considérons l'exemple simple d'une couronne rigide en rotation à vitesse constante  $\Omega$ . A l'intérieur de celle-ci est située une masse  $m$  maintenue par des raideurs  $k_r$  et  $k_t$  dans deux directions ainsi que des amortisseurs visqueux  $c_r$  et  $c_t$  également dans deux directions, comme le montre la figure 1.7. Cette masse ainsi que ces raideurs et ces amortisseurs sont donc aussi en rotation. Par contre, la masse est également amortie par des amortisseurs visqueux fixes  $c_1$  et  $c_2$  dans deux directions. Cette structure possède deux degrés de liberté qui sont les déplacements dans deux directions orthogonales de la masse interne à la couronne.

Commençons par le cas du repère fixe d'axes  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$ . Dans le cas où les parties tournantes de la



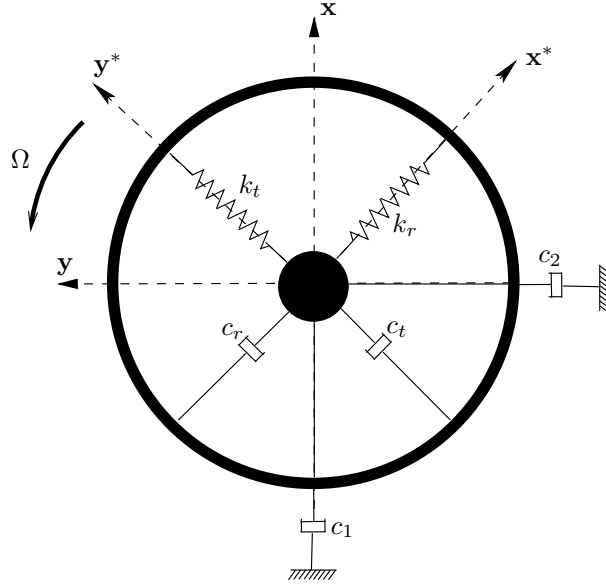


FIG. 1.7 – Exemple de système tournant

structure sont isotropes c'est-à-dire  $k_r = k_t = k_m$  et  $c_r = c_t = c_m$ , l'équation du comportement dynamique de celle-ci s'écrit :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{X}} + (\mathbf{K} + \mathbf{C})\mathbf{X} = \mathbf{0} \quad (1.27)$$

où  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{C}$  sont respectivement le vecteur des degrés de liberté de la masse dans le repère fixe et les matrices de masse, d'amortissement, de raideur et circulaire. Celles-ci ont les expressions suivantes :

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} c_1 + c_m & 0 \\ 0 & c_2 + c_m \end{bmatrix} \\ \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_m & 0 \\ 0 & k_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & \Omega c_m \\ -\Omega c_m & 0 \end{bmatrix} \quad (1.28)$$

Les propriétés des matrices sont les suivantes : les matrices de masse, d'amortissement et de raideur sont symétriques définies positives. La matrice circulaire est quant à elle anti-symétrique.

Dans le cas du repère tournant d'axes  $\mathbf{x}^*$ ,  $\mathbf{y}^*$ , si les parties fixes sont cette fois-ci considérées comme isotropes c'est-à-dire si  $c_1 = c_2 = c_f$  alors, l'équation matricielle du comportement dynamique de la structure est la suivante :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}}^* + (\mathbf{D} + \mathbf{G})\dot{\mathbf{X}}^* + (\mathbf{K} + \mathbf{C} + \mathbf{N})\mathbf{X}^* = \mathbf{0} \quad (1.29)$$

où cette fois-ci  $\mathbf{X}^*$ ,  $\mathbf{G}$  et  $\mathbf{N}$  sont respectivement le vecteur des degrés de liberté de la masse dans le repère tournant et les matrices gyroscopique et d'assouplissement centrifuge. Les expressions des matrices sont, dans ce cas les suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} c_f + c_r & 0 \\ 0 & c_f + c_t \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & -2m\Omega \\ 2m\Omega & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{K} &= \begin{bmatrix} k_r & 0 \\ 0 & k_t \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega c_f \\ \Omega c_f & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} -m\Omega^2 & 0 \\ 0 & -m\Omega^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.30)$$

Il est utile de remarquer que les matrices de masse, de raideur et d'amortissement sont symétriques définies positives. Les matrices gyroscopique et circulatoire sont antisymétriques. La matrice d'assouplissement centrifuge est quant à elle diagonale et définie négative.

Dans cet exemple, il n'apparaît pas de termes gyroscopiques dans la modélisation faite dans le repère fixe. Cependant, si la structure possède des inerties de rotation de section non négligeables (ce qui n'est pas le cas du modèle) alors, la modélisation de celle-ci dans le repère fixe contient une matrice gyroscopique. Cette matrice est généralement proportionnelle au rapport  $a$  de l'inertie polaire sur l'inertie diamétrale et est invariante par changement de repère fixe ou mobile. Afin d'illustrer dans un cas plus général la redistribution des termes de la modélisation d'une structure tournante en fonction du repère choisi, considérons un système parfaitement isotrope soumis à des efforts gyroscopiques dans le repère fixe. La formulation dans ce dernier repère est la suivante :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{v} \end{bmatrix} + \left\{ \begin{bmatrix} c_f + c_m & 0 \\ 0 & c_f + c_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a\Omega \\ -a\Omega & 0 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} \\ + \left\{ \begin{bmatrix} k_f + k_m & 0 \\ 0 & k_f + k_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & c_m\Omega \\ -c_m\Omega & 0 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.31)$$

Dans le repère tournant celle-ci s'écrit :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}^* \\ \ddot{v}^* \end{bmatrix} + \left\{ \begin{bmatrix} c_f + c_m & 0 \\ 0 & c_f + c_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & (a - 2m)\Omega \\ -(a - 2m)\Omega & 0 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \dot{u}^* \\ \dot{v}^* \end{bmatrix} \\ + \left\{ \begin{bmatrix} k_f + k_m & 0 \\ 0 & k_f + k_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -c_f\Omega \\ c_f\Omega & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (a - m)\Omega^2 & 0 \\ 0 & (a - m)\Omega^2 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} u^* \\ v^* \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.32)$$

Enfin, concernant les effets gyroscopiques, il faut noter comme il a été précisé plus tôt que plus ils sont importants (plus  $a$  est grand), plus la dépendance des fréquences avec la vitesse de rotation est grande. Ceci se traduit par des pentes importantes des courbes représentées dans un diagramme de Campbell qui est alors qualifié « d'ouvert ».

Concernant le diagramme de Campbell, sa représentation est elle aussi affectée par le changement de repère. En effet, du fait de la rotation propre de l'observateur dans le cas d'une modélisation dans le repère corotationnel, les fréquences croissant avec la vitesse de rotation

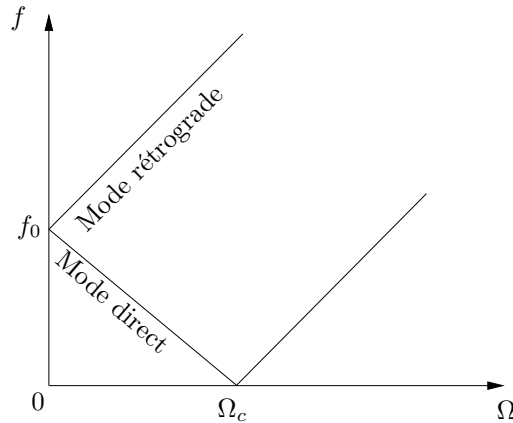


FIG. 1.8 – Diagramme de Campbell d'un rotor isotrope dans le repère tournant

sont les modes rétrogrades et celles diminuant avec la vitesse de rotation sont associées aux modes directs. Ceci a pour conséquence que la vitesse critique d'un rotor modélisé dans le repère tournant se trouve, dans un diagramme de Campbell, à l'intersection du mode direct avec l'axe des abscisses qui correspond, dans ce repère, à la droite d'excitation synchrone (Cf. figure 1.8).

### 1.3.5 Causes d'instabilité

Une des préoccupations principales concernant les turbomachines est le contrôle et la minimisation des vibrations, en particulier lors du passage des vitesses critiques. Cependant, un autre type de vibrations doit être pris en compte sous peine de dégradation sévère des structures. Il s'agit des phénomènes d'instabilité et de vibrations auto entretenues. Ceux-ci peuvent intervenir à des vitesses autres que les vitesses critiques du système et ont pour manifestations des amplitudes de vibrations croissant exponentiellement dans le temps jusqu'à ce que des non linéarités limitent leurs amplitudes ou encore, des phénomènes vibratoires auto entretenus à leurs propres fréquences. Dans ces phénomènes entrent notamment les instabilités dues aux dissymétries évoquées précédemment. Dans ce qui suit, d'autres types d'instabilités subies par les machines tournantes, les plus fréquemment répertoriés, vont être listés de façon non exhaustive.

Tout d'abord, on peut citer le rôle déstabilisant de l'amortissement interne des parties tournantes provenant notamment de l'arbre ou encore des interfaces entre les disques et les arbres. Ceci peut être expliqué par le système vue précédemment. L'équation 1.27 du comportement dynamique de ce dernier dans le repère fixe montre que l'amortissement tournant s'ajoute à l'amortissement fixe au niveau de la matrice d'amortissement  $\mathbf{D}$  mais résulte également en une matrice circulante  $\mathbf{C}$  antisymétrique. La matrice de raideur généralisée  $(\mathbf{K} + \mathbf{C})$  n'est plus de ce fait symétrique, ce qui est caractéristique d'un système potentiellement instable. Ainsi, l'amortissement des parties tournantes crée une force tangentielle dans la direction de la précession et dans le sens opposé à celle de l'amortissement fixe. Dans le cas d'un amor-

tissement visqueux, on remarque que ces forces sont proportionnelles à la vitesse de rotation. Ainsi, lorsque celle-ci augmente, les forces circulatoires, à partir d'un certain seuil, deviennent supérieures aux forces d'amortissement fixe et le système s'anime d'un mouvement de tournoiement d'amplitude croissante. Généralement ce seuil d'instabilité se situe après la première vitesse critique du rotor. Celui-ci peut d'ailleurs être exprimé de la sorte [21] :

$$\Omega_i = \Omega_c \left( 1 + \frac{c_f}{c_m} \right) \quad (1.33)$$

où  $\Omega_c$  est la vitesse critique du rotor. La vitesse à laquelle se déclenche l'instabilité est donc supérieure à la vitesse critique et dépend du ratio de l'amortissement fixe sur l'amortissement tournant.

Les paliers fluides peuvent également être source d'instabilité [23]. En effet, lors d'un mouvement de précession direct classique de l'arbre, celui-ci se trouve excentré par rapport au palier. La pression à l'intérieur du palier est donc plus forte là où le jeu est moindre. De plus, compte tenu de la rotation propre de l'arbre sur lui même, cette pression est supérieure du coté amont (par rapport au sens de rotation) de la réduction du jeu à celle qui règne du coté aval (phénomène coin d'huile). Il en résulte également une force tangentielle dans la direction de rotation de l'arbre qui tend à en accroître les amplitudes.

Un phénomène similaire, le tip clearance, peut se produire entre un rotor et le carter en vis-à-vis, ou une autre partie fixe [24]. Alford, en 1965, et Thomas, en 1958, furent les premiers à constater que l'efficacité locale d'une turbine augmentait avec la diminution du jeu entre le bout de l'aube et le carter. Cependant, le couple local et la force tangentielle locale appliqués par le fluide sur l'aube augmentent avec l'efficacité locale. Ainsi, en intégrant toutes ces forces sur le contour du rotor, il résulte une force orthogonale au déplacement de celui-ci. Cette force, nommée force de Thomas Alford, va, au cours du mouvement de tournoiement synchrone du rotor excité par un balourd, amplifier ce mouvement et inciter ce dernier à impacter le stator. Une récente étude a montré numériquement ce phénomène. En effet, Kim et *al.* [46] ont combiné un modèle structural de rotor composé d'un disque supporté par deux paliers équidistants par l'intermédiaire d'une poutre d'Euler-Bernoulli avec un modèle d'écoulement fluide provenant d'une étude de S. J. Song et M. Martinez-Sanchez [84, 85]. Dans celle-ci, les grandeurs relatives à l'écoulement du fluide en bout d'aube sont définies localement et les forces locales en sont déduites. Kim et *al.*, après intégration sur le contour du rotor de ces efforts, obtiennent la résultante des efforts aérodynamiques du fluide sur ce dernier. Par une approche éléments finis, ils combinent le modèle structural et le modèle fluide exprimé en termes de raideur et d'amortissement. Ils montrent ainsi le rôle déstabilisant des forces de Alford.

Il faut noter que même en l'absence de carter, les résultantes fluides sur un rotor aubagé en cas de déflexion de celui-ci peuvent être source d'instabilité [22]. En effet, une déflexion du rotor implique une inclinaison du plan du disque aubagé et ainsi, un angle entre son vecteur vitesse de rotation et la vitesse relative de l'air due au mouvement de l'avion. Il en résulte une modification de la charge des aubes du rotor qui globalement engendre un moment perpendiculaire à la déflexion de ce dernier et donc tend à le faire tourner. Si les forces d'amortissement fixes ne sont pas suffisantes pour amortir cette dynamique, le système peut entrer en instabilité.

Le contact direct entre partie fixe et partie tournante peut également être source d'instabilité. Ceci peut être le cas entre les aubes d'un disque aubagé et le carter en vis-à-vis ou entre l'arbre du rotor et un palier ou encore au niveau des labyrinthes. Une fois le jeu entre la partie tournante et la partie fixe consommé, suite par exemple à une déflexion du rotor, une force de frottement agit tangentiellement à ce dernier [21]. Il s'en suit alors un mouvement de tournoiement de celui-ci. La force centrifuge agissant sur le rotor s'en trouve augmentée et le rotor, d'avantage plaqué contre le stator. Or, la force de frottement, dans le cas d'un frottement de Coulomb, étant proportionnelle à la composante normale de la force de contact, se trouve alors accrue engendrant ainsi un tournoiement du rotor d'amplitude plus grande et ainsi de suite. Dans le cas ici décrit, le tournoiement se fait dans le sens rétrograde par rapport à la rotation propre du rotor. Afin d'éviter ce phénomène dû au frottement sec, il est possible de lubrifier autant que possible les zones de contact ou, de rendre celles-ci abrasables c'est-à-dire, notamment dans le cas du contact aubes/carter, d'enduire ce dernier d'une couche de matériau abrasable c'est-à-dire facilement usinable de sorte de ne pas engendrer de tournoiement du rotor.

Lors de contacts frottants à faible vitesse, des oscillations auto-entretenues peuvent être générées à cause d'une discontinuité du coefficient de frottement. Ce phénomène est répertorié sous le nom de stick-slip et se caractérise par des phases d'adhérence des deux structures suivies de phases de glissements relatifs [36, 37].

Pour terminer, le phénomène d'interaction modale entre disque aubagé et carter peut être cité. En effet, comme nous l'avons vu, une structure soumise à des effets gyroscopiques présente des modes dont la fréquence varie en fonction de la vitesse de rotation de cette dernière. Si ces structures sont à symétrie axiale, elles développeront des modes tournants directs ou rétrogrades c'est-à-dire que des ondes se propageront dans la structure soit dans le même sens que sa rotation propre (direct) soit dans le sens opposé (rétrograde). Si les vitesses de propagation des ondes dans le stator et dans le rotor sont voisines et que leurs déformées sont compatibles alors les contacts entre eux peuvent perdurer avec des amplitudes importantes. Ce couplage a déjà été mis en évidence par les thèses de Schmiechen [80] et Legrand [51]. Une condition nécessaire à l'apparition de ce phénomène a été mise en équation théoriquement [87]. En effet, les déformées modales de structures périodiques et axisymétriques sont classées par leur nombre de diamètres nodaux où, le long de ces lignes nodales il n'y a pas de vibrations. La vitesse d'une onde à  $n$  diamètres nodaux s'exprimant par :  $v_n = \omega_n/n$ ,  $\omega_n$  étant la pulsation associée, l'égalité des vitesses d'onde dans les deux structures en regard s'exprime par :  $\omega_{stator} = n\Omega \pm \omega_{rotor}$ . Compte-tenu des forces de frottement qui excitent le rotor dans le sens opposé à sa rotation propre, une condition nécessaire à l'interaction modale s'écrit :

$$\omega_{stator} = n\Omega - \omega_{rotor}.$$

## 1.4 Conclusion

Dans ce premier chapitre, le principe de fonctionnement général des moteurs d'avion civils a été explicité. Les outils et méthodes de modélisation en mécanique ont été présentés. Enfin, l'équation générale du comportement dynamique d'une structure en rotation a mis en évidence des phénomènes caractéristiques des machines tournantes dont les principaux effets ont été listés. Ainsi, les causes d'instabilité les plus fréquentes ont été abordées brièvement. Parmi elles figure le contact direct entre parties fixes et tournantes. Cette éventualité ayant fait l'objet de nombreuses études et constituant l'un des points clés des modélisations et phénomènes observés dans le cadre de cette thèse, il est important d'en faire un état de l'art, que ce soit au niveau de la modélisation du contact lui-même ou des phénomènes engendrés.



## Chapitre 2

# Modélisations du contact rotor - stator

Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, le contact entre parties fixes et parties tournantes est une cause très fréquente d'instabilité des machines tournantes. Dans ce contexte déjà riche d'un point de vue phénoménologique, il existe une grande diversité de comportements dynamiques liée aux contacts entre le rotor et le stator. Avant de faire un état de l'art des publications existantes et de leurs conclusions générales, il est nécessaire de comprendre comment le contact est intégré dans les équations du comportement dynamique des structures.

### 2.1 Mécanique du contact

#### 2.1.1 Définition de systèmes élastiques en contact

Plaçons nous dans le cadre des solides déformables continus, comme au chapitre précédent, en section 1.2.2. Soient donc deux corps déformables,  $\Omega^l$  où  $l = 1, 2$ , sous-ensembles ouverts de  $\mathbb{R}^3$  et potentiellement en contact, comme illustré en figure 2.1. D'une façon générale, la frontière  $\partial\Omega^l$  de chacun de ces corps peut être partitionnée en trois sous-frontières  $\Gamma_u^l$ ,  $\Gamma_f^l$  et  $\Gamma_c^l$ .  $\Gamma_u^l$  représente la frontière de  $\Omega^l$  où un déplacement  $\mathbf{u}_d^l$  est imposé,  $\Gamma_f^l$  représente la partition de  $\Gamma^l$  soumise à une densité d'efforts surfaciques  $\mathbf{t}_d^l$  et enfin,  $\Gamma_c^l$  est la zone de contact entre les deux corps. L'union d'un corps et de sa frontière  $\bar{\Omega}^l = \Omega^l \cup \partial\Omega^l$  constitue un sous-ensemble fermé de  $\mathbb{R}^3$ . Les frontières évoquées vérifient les relations intuitives suivantes :

$$\begin{cases} \partial\Omega^l = \Gamma_u^l \cup \Gamma_f^l \cup \Gamma_c^l \\ \Gamma_u^l \cap \Gamma_f^l = \Gamma_u^l \cap \Gamma_c^l = \Gamma_f^l \cap \Gamma_c^l = \emptyset \end{cases} \quad (2.1)$$

Ces corps sont également soumis à une densité d'efforts volumiques  $\mathbf{f}_d^l$  dans  $\Omega^l$ . Tout l'enjeu du problème sera de déterminer les déplacements  $\mathbf{u}^l$  des deux structures en contact ou non.

#### 2.1.2 Loi de contact unilatéral

Dans le cas qui nous intéresse, le rotor et le stator peuvent rentrer en contact de façon intermittente ou permanente. Dans tous les cas, ce contact est initié par un « impact » puisque les deux structures impliquées sont a priori toutes les deux en mouvement. Dans le cas des



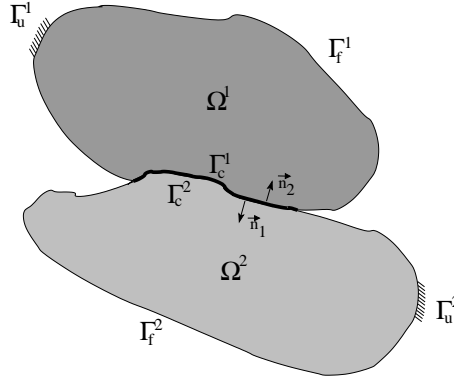


FIG. 2.1 – Deux corps déformables en contact

contacts entre le rotor et le stator d'un turboréacteur, à vitesse de rotation nulle et en l'absence d'excitation, les aubages tournants n'impactent pas les parties fixes. Le contact entre ces structures n'est donc possible que si les efforts extérieurs (balourd, pression aérodynamique, etc.) tendent à les rapprocher l'une de l'autre. Ceci est la définition même d'un contact unilatéral. Afin de caractériser les contraintes engendrées par le contact, il est d'usage de définir un des deux corps comme « maître » et l'autre, comme « esclave ». Les contraintes seront décrites en fonction des paramètres du corps maître. Bien sûr, le principe d'action-réaction permet d'interchanger les rôles des corps maître et esclave. Ainsi, si  $\mathbf{n} = \mathbf{n}^1 = -\mathbf{n}^2$  définit la normale sortante à la frontière  $\Gamma_c^1$  et  $\mathbf{F}$ , la force exercée par  $\bar{\Omega}^2$  sur  $\bar{\Omega}^1$  (défini comme corps maître) en un point de leur frontière commune alors, les conditions du contact unilatéral, dites conditions de Hertz-Signorini-Moreau [95] s'écrivent :

$$d(\mathbf{u}) = (\mathbf{u}^2 - \mathbf{u}^1) \cdot \mathbf{n} \geq 0, \text{ avec } \mathbf{u} = (\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2) \quad (2.2)$$

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = F_n \leq 0 \quad (2.3)$$

$$d(\mathbf{u}) F_n = 0 \quad (2.4)$$

L'équation 2.2 indique qu'il ne peut y avoir que décollement et non pénétration des solides l'un dans l'autre. L'équation 2.3 indique que les efforts normaux ne peuvent correspondre qu'à de la compression. Enfin, l'équation 2.4, appelée condition de complémentarité, indique qu'en un point il y a soit contact, soit décollement. Ces relations doivent rester vraies pour tout point appartenant aux surfaces de contact. Elles peuvent être résumées par la figure 2.2. On peut noter que ces conditions coïncident avec les conditions complémentaires de Kuhn-Tucker dans la théorie de l'optimisation [95].

### 2.1.3 Loi de frottement

Dans la réalité, tout contact s'accompagne d'une force de frottement dont l'intensité est expérimentalement fonction de la composante normale de la force de contact. Le premier à l'avoir mis en évidence fût Da Vinci au 15<sup>ième</sup> siècle mais ce fût Coulomb qui, à la fin du

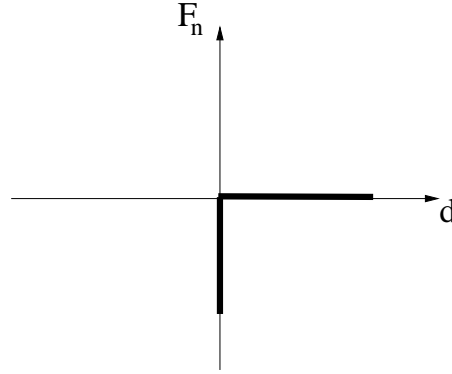


FIG. 2.2 – Loi de contact unilatéral

18<sup>ème</sup> siècle, mis le phénomène en équation [95]. Ainsi, la loi de frottement la plus répandue en ingénierie, dénommée loi de Coulomb, consiste à considérer la composante tangentielle  $\mathbf{F}_t$  de la force de contact comme étant proportionnelle à la composante normale  $F_n$  de cette même force. Le coefficient de frottement, généralement noté  $\mu$ , est ici considéré comme constant bien qu'il existe des modèles plus complexes dépendant de nombreux paramètres [61, 65, 64, 38, 39, 71].

Cette loi permet la distinction de deux types de comportement des structures en contact : une phase de « collement » et une phase de « glissement » .

- Si la composante normale  $F_n$  de la force de contact, pondérée par le coefficient de frottement  $\mu$  est supérieure en intensité à la composante tangentielle  $\mathbf{F}_t$  de celle-ci ( $\|\mathbf{F}_t\| < \mu |F_n|$ ) alors, les deux structures ne peuvent pas se déplacer l'une par rapport à l'autre et il s'en suit une phase de collement.
- Si la composante tangentielle  $\mathbf{F}_t$  de la force de contact atteint en intensité la valeur de la composante normale  $F_n$  de cette dernière, pondérée par le coefficient de frottement  $\mu$  ( $\|\mathbf{F}_t\| = \mu |F_n|$ ) alors, les deux structures se déplacent tangentiellement l'une par rapport à l'autre ( $\|\mathbf{u}_t^1 - \mathbf{u}_t^2\| \geq 0$ ). Il s'agit de la phase de glissement. Durant cette phase, la force de frottement agit dans la direction de la vitesse relative des deux corps et en sens opposé.

Cette loi est récapitulée par la figure 2.3. En notant  $\mathbf{u}_t^l$  le déplacement tangentiel du solide  $l$  sur  $\Gamma_c$ , les conditions de Karush-Khun-Tucker associées à la loi de Coulomb s'écrivent, une fois le contact établi :

$$|\mathbf{u}_t| = \|\mathbf{u}_t^1 - \mathbf{u}_t^2\| \geq 0 \quad (2.5)$$

$$f(F_n, \mathbf{F}_t) = \|\mathbf{F}_t\| - \mu |F_n| \leq 0 \quad (2.6)$$

$$|\mathbf{u}_t| f = 0 \quad (2.7)$$

#### 2.1.4 Prise en compte du frottement

Nous allons voir comment ces lois de contact peuvent être intégrées dans les équations du comportement dynamique d'un corps continu déformable. Deux formulations, une dite « forte »

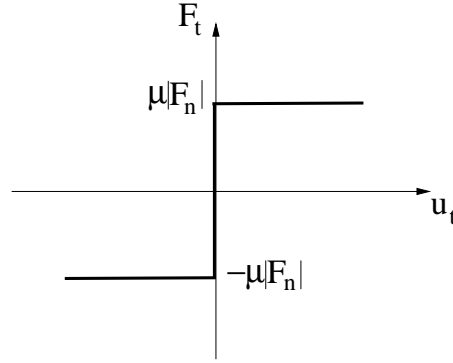


FIG. 2.3 – Loi de frottement de Coulomb

et l'autre « faible » de ces équations peuvent être obtenues. Celles-ci vont être explicitées, toujours dans le cadre des solides déformables continus avec l'hypothèse des petites perturbations.

#### 2.1.4.1 Formulation forte

En utilisant les lois classiques de la mécanique des milieux continus, dans le cadre précisé ci-dessus, la formulation forte d'un problème de contact en dynamique se formule comme suit :

1. Equations d'équilibre dynamiques dans  $\Omega^l$

$$\sigma_{ij,j}^l + f_{di}^l = \rho^l \frac{\partial^2 u_i^l}{\partial t^2} \Leftrightarrow \text{div } \bar{\sigma}^l + \mathbf{f}_d^l = \rho \ddot{\mathbf{u}}^l \quad (2.8)$$

où  $\bar{\sigma}^l$  est le tenseur des contraintes de Cauchy dans  $\Omega^l$  et où la notation  $_{,j}$  indique une différenciation par rapport à la  $j^{\text{ème}}$  variable.

2. Conditions limites en déplacements sur  $\Gamma_u^l$

$$\mathbf{u}^l = \mathbf{u}_d^l \quad (2.9)$$

3. Conditions limites en forces sur  $\Gamma_f^l$

$$\bar{\sigma}^l \cdot \mathbf{n}^l = \mathbf{t}_d^l \quad (2.10)$$

4. Conditions initiales dans  $\bar{\Omega}^l$

$$\left| \begin{array}{l} \mathbf{u}^l(0) = \mathbf{u}_0^l \\ \dot{\mathbf{u}}^l(0) = \dot{\mathbf{u}}_0^l \end{array} \right. \quad (2.11)$$

5. Loi de comportement du matériau

Les déformations étant supposées petites, le tenseur des déformations  $\bar{\epsilon}$  de Green-Lagrange s'écrit :

$$\epsilon_{ij}(\mathbf{u}^l) = \frac{1}{2} (u_{i,j}^l + u_{j,i}^l) \Leftrightarrow \bar{\epsilon} = \frac{1}{2} [\mathbf{grad}(\mathbf{u}^l) + \mathbf{grad}^T(\mathbf{u}^l)] \quad (2.12)$$

Le comportement des solides est supposé élastique. En notant  $a_{ijkh}^l$  le tenseur d'élasticité, la loi de comportement reliant le tenseur des contraintes de Cauchy au tenseur des déformations de Green-Lagrange s'écrit :

$$\sigma_{ij}^l = a_{ijkh}^l \epsilon_{kh}(\mathbf{u}^l) \quad (2.13)$$

## 6. Contraintes dues au contact

Sur  $\Gamma_c = \Gamma_c^1 = \Gamma_c^2$ , le vecteur contrainte  $\mathbf{T}^l$  est décomposé sur ses composantes normale et tangentielle :

$$\mathbf{T}^l = \sigma_n^l \mathbf{n}^l + \sigma_t^l \quad (2.14)$$

D'après les sections précédentes 2.1.2 et 2.1.3, les contraintes suivantes doivent être vérifiées :

– Contraintes de contact unilatéral

$$\left| \begin{array}{l} d(\mathbf{u}) \geq 0 \\ \sigma_n = \sigma_n^1 = \sigma_n^2 \leq 0 \\ d(\mathbf{u}) \sigma_n = 0 \end{array} \right. \quad (2.15)$$

– Loi de frottement de Coulomb (si  $d = 0$  et en notant  $\sigma_t = \sigma_t^1 = -\sigma_t^2$ )

$$\left| \begin{array}{l} \|\mathbf{u}_t^1 - \mathbf{u}_t^2\| \geq 0 \\ \|\mathbf{u}_t^1 - \mathbf{u}_t^2\| (\|\sigma_t\| - \mu |\sigma_n|) = 0 \\ \|\sigma_t\| < \mu |\sigma_n| \Rightarrow \dot{\mathbf{u}}_t^1 - \dot{\mathbf{u}}_t^2 = 0 \\ \|\sigma_t\| = \mu |\sigma_n| \Rightarrow \exists \lambda, \dot{\mathbf{u}}_t^1 - \dot{\mathbf{u}}_t^2 = -\lambda \sigma_t \end{array} \right. \quad (2.16)$$

Cependant, la formulation forte d'un problème d'élastodynamique ne peut être résolue que dans certains cas classiques. Il faut ainsi généralement faire appel à une formulation « affaiblie » .

## 2.1.4.2 Formulation faible

La formulation faible peut servir de base à une future discrétisation du problème, comme nous l'avons fait au chapitre précédent, à la section 1.2.2. Elle s'obtient, en mécanique, par le principe des puissances virtuelles explicité ci-après.

Considérons les espaces :

$$V(\Omega^l) = \left\{ \mathbf{v}^l, \mathbf{v}^l = \mathbf{u}_d^l \text{ sur } \Gamma_u^l \right\} \quad (2.17)$$

et

$$K = \left\{ \mathbf{v} = (\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2) \in V(\Omega^1) \times V(\Omega^2), d(\mathbf{v}) \geq 0 \text{ sur } \Gamma_c \right\} \quad (2.18)$$

$K$  représente l'espace des déplacements admissibles c'est-à-dire vérifiant les conditions de décollement à la surface de contact.

Soit  $\mathbf{v} \in K$ .  $\dot{\mathbf{v}}^l$  est donc un champ de vitesses virtuelles compatibles pour chaque corps. Le bilan des puissances virtuelles associé peut s'obtenir à partir de l'équation d'équilibre dynamique de chacun de ces derniers (Cf. équation 2.8). Il vient alors :

$$\int_{\Omega^l} \sigma_{ij,j}^l \dot{v}_i^l d\Omega^l + \int_{\Omega^l} f_{di}^l \dot{v}_i^l d\Omega^l = \int_{\Omega^l} \rho^l \ddot{u}_i^l \dot{v}_i^l d\Omega^l \quad (2.19)$$

La formule de Green appliquée au premier terme du membre de gauche de cette égalité donne :

$$\int_{\Omega^l} \sigma_{ij,j}^l \dot{v}_i^l d\Omega^l = \int_{\Gamma^l} \sigma_{ij}^l \dot{v}_i^l n_j^l d\Gamma^l - \int_{\Omega^l} \sigma_{ij}^l \dot{v}_{i,j}^l d\Omega^l \quad (2.20)$$

Le tenseur des contraintes étant symétrique c'est-à-dire  $\sigma_{ij}^l = \sigma_{ji}^l$ , on peut écrire :

$$\sigma_{ij}^l \dot{v}_{i,j}^l = \frac{1}{2} \left( \sigma_{ij}^l \dot{v}_{i,j}^l + \sigma_{ji}^l \dot{v}_{j,i}^l \right) = \sigma_{ij}^l \epsilon_{ij} \left( \dot{\mathbf{v}}^l \right) \quad (2.21)$$

Ainsi, la formulation classique du principe des puissances virtuelles s'écrit :

$$\int_{\Omega^l} \rho^l \ddot{u}_i^l \dot{v}_i^l d\Omega^l + \int_{\Omega^l} \sigma_{ij}^l \epsilon_{ij} \left( \dot{\mathbf{v}}^l \right) d\Omega^l = \int_{\Gamma^l} \sigma_{ij}^l \dot{v}_i^l n_j^l d\Gamma^l + \int_{\Omega^l} f_{d_i}^l \dot{v}_i^l d\Omega^l \quad (2.22)$$

L'intégrale sur la frontière  $\Gamma^l$  peut se décomposer comme suit, compte-tenu des conditions aux limites de notre problème :

$$\int_{\Gamma^l} \sigma_{ij}^l \dot{v}_i^l n_j^l d\Gamma^l = \int_{\Gamma_f^l} t_{d_i}^l \dot{v}_i^l d\Gamma^l + \int_{\Gamma_u^l} \sigma_{ij}^l \dot{v}_i^l n_j^l d\Gamma^l + \int_{\Gamma_c^l} \sigma_n^l \dot{v}_n^l d\Gamma^l + \int_{\Gamma_c^l} \sigma_t^l \dot{\mathbf{v}}_t^l d\Gamma^l \quad (2.23)$$

Ainsi, le principe des puissances virtuelles peut, dans le cas du problème considéré, s'écrire de la façon suivante :

$$\forall \mathbf{v} \in K \quad (\rho \ddot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{v}}) + a(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{v}}) = L(\dot{\mathbf{v}}) + \langle \mathbf{f}_u, \dot{\mathbf{v}} \rangle + \langle \mathbf{f}_{cn}, \dot{\mathbf{v}} \rangle + \langle \mathbf{f}_{ct}, \dot{\mathbf{v}} \rangle \quad (2.24)$$

Où les différents termes représentent les puissances suivantes :

- $(\rho \ddot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{v}})$  représente la puissance virtuelle des efforts d'inertie :

$$(\rho \ddot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{v}}) = \sum_{l=1}^2 \int_{\Omega^l} \rho^l \ddot{\mathbf{u}}^l \cdot \dot{\mathbf{v}}^l d\Omega^l \quad (2.25)$$

- $a(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{v}})$  représente la puissance virtuelle des efforts intérieurs :

$$a(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{v}}) = \sum_{l=1}^2 \int_{\Omega^l} a_{ijkh}^l \epsilon_{kh} \left( \mathbf{u}^l \right) \epsilon_{ij} \left( \dot{\mathbf{v}}^l \right) d\Omega^l \quad (2.26)$$

- $L(\dot{\mathbf{v}})$  représente la puissance virtuelle des efforts extérieurs :

$$L(\dot{\mathbf{v}}) = \sum_{l=1}^2 \left( \int_{\Omega^l} \mathbf{f}_d^l \cdot \dot{\mathbf{v}}^l d\Omega^l + \int_{\Gamma_f^l} \mathbf{t}_d^l \cdot \dot{\mathbf{v}}^l d\Gamma^l \right) \quad (2.27)$$

- $\langle \mathbf{f}_u, \dot{\mathbf{v}} \rangle$  représente la puissance virtuelle des efforts nécessaires pour imposer les déplacements  $\mathbf{u}_d$  sur  $\Gamma_u^l$  :

$$\langle \mathbf{f}_u, \dot{\mathbf{v}} \rangle = \sum_{l=1}^2 \int_{\Gamma_u^l} \sigma_{ij}^l \dot{v}_i^l n_j^l d\Gamma^l \quad (2.28)$$

- $\langle \mathbf{f}_{cn}, \dot{\mathbf{v}} \rangle$  représente la puissance virtuelle des efforts de contact normaux :

$$\langle \mathbf{f}_{cn}, \dot{\mathbf{v}} \rangle = \sum_{l=1}^2 \int_{\Gamma_c^l} \sigma_n^l \dot{v}_n^l d\Gamma^l \quad (2.29)$$

- $\langle \mathbf{f}_{ct}, \dot{\mathbf{v}} \rangle$  représente la puissance virtuelle des efforts de contact tangentiels :

$$\langle \mathbf{f}_{ct}, \dot{\mathbf{v}} \rangle = \sum_{l=1}^2 \int_{\Gamma_c^l} \sigma_t^l \dot{\mathbf{v}}_t^l d\Gamma^l \quad (2.30)$$

On peut noter que la puissance non plus virtuelle mais réelle des efforts de contact normaux, c'est-à-dire en prenant  $\mathbf{v} = \mathbf{u}$  est nulle. En effet, cette dernière peut également s'écrire :

$$\langle \mathbf{f}_{\text{cn}}, \dot{\mathbf{v}} \rangle = - \int_{\Gamma_c} \sigma_n(\mathbf{u}) \dot{d}(\mathbf{v}) d\Gamma \quad (2.31)$$

En vertu des contraintes de contact, on a bien  $\langle \mathbf{f}_{\text{cn}}, \dot{\mathbf{u}} \rangle = 0$ .

Cette façon de construire une forme intégrale, à partir du système d'équations aux dérivées partielles régissant le comportement du problème, est connue sous le nom de méthode de résidus pondérés. Cette formulation est moins exigeante que la formulation forte en ce qui concerne les espaces d'appartenance des fonctions solutions. Généralement, les espaces fonctionnels considérés dans le cadre de la formulation faible sont des espaces de Sobolev ou de Hilbert.

#### 2.1.4.3 Egalité variationnelle

L'équation 2.24 permet de formuler complètement notre problème de la façon suivante :

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{u} \in K \text{ tel que} \\ \forall \mathbf{v} \in K \quad (\rho \ddot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{u}}) + a(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{u}}) = L(\dot{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{u}}) + \langle \mathbf{f}_{\text{cn}}, \dot{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{u}} \rangle + \langle \mathbf{f}_{\text{ct}}, \dot{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{u}} \rangle \end{array} \right. \quad (2.32)$$

Bien sûr, dans l'expression précédente, la puissance des efforts nécessaires pour imposer les déplacements  $\mathbf{u}_d$  sur  $\Gamma_u^l$  a disparu car sur  $\Gamma_u^1 \times \Gamma_u^2$ ,  $\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{u}}_d$  d'où  $\langle \mathbf{f}_{\text{u}}, \dot{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{u}} \rangle = 0$

#### 2.1.4.4 Inégalité variationnelle

Il existe une autre formulation du problème exposé en section 2.1.4.1. En effet, Duvaut et Lions [19] montrent que la formulation forte de notre problème est équivalente à la formulation suivante :

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{u} \in K \text{ tel que} \\ \forall \mathbf{v} \in K \quad (\rho \ddot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{u}}) + a(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{u}}) + j(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{v}}) - j(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) \geq L(\dot{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{u}}) + \langle \mathbf{f}_{\text{cn}}, \dot{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{u}} \rangle \end{array} \right. \quad (2.33)$$

où

$$j(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{v}}) = \int_{\Gamma_c} \mu |\sigma_n(\mathbf{u})| \|\dot{\mathbf{v}}_t^1 - \dot{\mathbf{v}}_t^2\| d\Gamma \quad (2.34)$$

Néanmoins, une formulation plus simple que cette dernière peut être obtenue. En effet, dans le cadre des petites perturbations, il est possible de faire l'analogie entre les déplacements et les vitesses, de même qu'entre les déformations et les taux de déformations. Il y a donc dans ce cas, équivalence entre le principe des puissances virtuelles et le principe des travaux virtuels. Ainsi, en reprenant la démarche de la section 2.1.4.2, en remplaçant les vitesses par des déplacements virtuels, on montre que la formulation forte de notre problème équivaut également à :

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{u} \in K \text{ tel que} \\ \forall \mathbf{v} \in K \quad (\rho \ddot{\mathbf{u}}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) + a(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) = L(\mathbf{v} - \mathbf{u}) + \langle \mathbf{f}_{\text{cn}}, \mathbf{v} - \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{f}_{\text{ct}}, \mathbf{v} - \mathbf{u} \rangle \end{array} \right. \quad (2.35)$$

Or, on peut remarquer, au même titre que la remarque faite sur la puissance réelle des efforts de contact normaux, que :

$$\langle \mathbf{f}_{cn}, \mathbf{v} - \mathbf{u} \rangle = - \int_{\Gamma_c} \sigma_n(\mathbf{u}) d(\mathbf{v}) d\Gamma \geq 0 \quad (2.36)$$

puisque d'après les contraintes dues au contact,  $\sigma_n(\mathbf{u}) \leq 0$  et  $d(\mathbf{v}) \geq 0$ . Par ailleurs, pour tout  $\mathbf{v} \in K$ , on a  $\sigma_t \cdot (\mathbf{v}_t^1 - \mathbf{v}_t^2) \geq -\|\sigma_t\| \|\mathbf{v}_t^1 - \mathbf{v}_t^2\|$  de même que  $\|\sigma_t\| \leq \mu |\sigma_n|$  d'où on montre également que :

$$\langle \mathbf{f}_{ct}, \mathbf{v} - \mathbf{u} \rangle \geq j(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - j(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad (2.37)$$

Ainsi, le problème 2.35 conduit à la formulation variationnelle suivante :

$$(\rho \ddot{\mathbf{u}}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) + a(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) + j(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - j(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq L(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \quad (2.38)$$

Du fait de l'inégalité et de la non différentiabilité des termes liés au frottement qui imposent à la solution de passer soudainement de l'état « collé » à l'état « glissement », le problème est fortement non linéaire et sa résolution est délicate.

Duvaut et Lions [19] montrent que les inégalités variationnelles précédentes sont équivalentes à des problèmes de minimisation de l'énergie potentielle totale du système en respectant les contraintes dues au contact. Le cas du contact sans frottement devient donc un problème de minimisation sous contraintes classique. Par contre, dans le cas d'un problème de contact avec frottement, la non différentiabilité de  $j$  nécessite une régularisation de la norme ou encore de la loi de Coulomb, sans quoi il n'existe pas de problème de minimisation standard équivalent. Des exemples de régularisations sont donnés par Wriggers [95].

### 2.1.5 Méthodes de gestion du contact

Comme nous venons de l'évoquer, les problèmes de contact peuvent être équivalents à des problèmes de minimisation. C'est le principe sur lequel reposent les méthodes de gestion du contact. Dans ce qui suit, quelques méthodes de prise en compte du contact les plus répandues vont être développées. Elles consistent en une régularisation des lois non linéaires du contact et du frottement en fonction uniquement des déplacements. Dans un souci de simplicité, les méthodes des multiplicateurs de Lagrange, de pénalité et des Lagrangiens augmentés seront explicitées dans le cas d'un problème statique. Cette restriction n'est cependant pas pénalisante car un problème dynamique, après discrétisation en temps, est une succession de problèmes pseudo-statiques auxquels ces méthodes peuvent s'appliquer.

Leur principe consiste à inclure les contraintes dues au contact dans la formulation variationnelle. On va donc chercher à minimiser l'énergie suivante :

$$\Pi = a(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) - L(\mathbf{v} - \mathbf{u}) + \Pi_c \quad (2.39)$$

où  $\Pi_c$  représente les contributions des contraintes de contact. Il faut noter que cette formulation n'est valable que dans le cas de contacts n'incluant pas de frottement, en tant que processus

dissipatif dans la phase glissante. Cette dissipation pourra être introduite artificiellement dans la description du phénomène. La différence entre les trois méthodes qui vont être développées réside dans la définition de  $\Pi_c$ .

### 2.1.5.1 Multiplicateurs de Lagrange

Dans cette méthode, la contribution du contact est exprimée comme suit :

$$\Pi_c^{ML} = \int_{\Gamma_c} (\lambda_n g_n + \lambda_t \cdot \mathbf{g}_t) d\Gamma \quad (2.40)$$

où  $\lambda_n$  et  $\lambda_t$  sont les multiplicateurs de Lagrange, qui sont des nouvelles inconnues du problème.  $g_n$  et  $\mathbf{g}_t$  représentent respectivement les jeux entre les structures dans les directions normale et tangentielle. La variation de  $\Pi_c^{ML}$  fournit la formulation des contraintes de contact à vérifier :

$$C_c^{ML} = \int_{\Gamma_c} (\lambda_n \delta g_n + \lambda_t \cdot \delta \mathbf{g}_t) d\Gamma + \int_{\Gamma_c} (\delta \lambda_n g_n + \delta \lambda_t \cdot \mathbf{g}_t) d\Gamma \quad (2.41)$$

La première intégrale représente le travail virtuel des multiplicateurs de Lagrange le long des jeux, dans les directions normale et tangentielle. La seconde décrit l'évolution des contraintes. Il est utile de remarquer que les multiplicateurs de Lagrange peuvent être interprétés comme les efforts de contact normaux. Le cas du glissement par frottement peut être explicité d'avantage. Tout d'abord, dans le cas d'une phase « collé », le jeu dans la direction tangente  $\mathbf{g}_t$  est nul, ce qui conduit à une équation de contrainte à partir de laquelle  $\lambda_t$  peut être déterminé. Dans le cas d'un glissement,  $\lambda_t$  représente la contrainte tangentielle de contact  $\lambda_t = \sigma_t$ . Celle-ci peut être exprimée à partir des contraintes de contact en phase « glissé » et  $C_c^{ML}$  s'exprime alors comme suit :

$$C_c^{ML_{slip}} = \int_{\Gamma_c} (\lambda_n \delta g_n + \sigma_t \cdot \delta \mathbf{g}_t) d\Gamma + \int_{\Gamma_c} (\delta \lambda_n g_n) d\Gamma \quad (2.42)$$

### 2.1.5.2 Méthode de pénalité

Le concept d'une pénalisation consiste à transformer un problème d'optimisation sous contraintes en un problème ou une suite de problèmes d'optimisation sans contraintes. La recherche de la solution se fait alors dans un domaine admissible qui n'est plus contraint. Cette méthode a l'avantage de sa simplicité car elle ne fait pas intervenir d'inconnues supplémentaires comme la méthode précédente mais ses résultats dépendent fortement du choix du paramètre de pénalité.

Concernant sa mise en œuvre, on peut définir une fonction de pénétration d'une structure dans l'autre notée  $\bar{g}_n$  :

$$\bar{g}_n = \begin{cases} (\mathbf{u}^2 - \mathbf{u}^1) \cdot \mathbf{n} & \text{si } (\mathbf{u}^2 - \mathbf{u}^1) \cdot \mathbf{n} < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.43)$$

Un terme de pénalité dépendant de la pénétration est ajouté à  $\Pi$  de la façon suivante :

$$\Pi_c^P = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_c} \left( \epsilon_n (\bar{g}_n)^2 + \epsilon_t \mathbf{g}_t \cdot \mathbf{g}_t \right) d\Gamma, \quad \epsilon_n, \epsilon_t > 0 \quad (2.44)$$



$\epsilon_n$  et  $\epsilon_t$  représentant les paramètres de pénalité. Ce terme de pénalité  $\Pi_c^P$  doit seulement être considéré lors de contraintes actives définies elles mêmes par la fonction  $\bar{g}_n$ . Comme précédemment, la variation de  $\Pi_c^P$  donne l'expression des contraintes de contact considérées :

$$C_c^P = \int_{\Gamma_c} (\epsilon_n \bar{g}_n \delta \bar{g}_n + \epsilon_t \mathbf{g}_t \cdot \delta \mathbf{g}_t) d\Gamma, \quad \epsilon_n, \epsilon_t > 0 \quad (2.45)$$

On peut montrer [54] que si  $\epsilon_n \rightarrow \infty$  et  $\epsilon_t \rightarrow \infty$  alors, la solution obtenue par cette méthode est la même que celle obtenue par la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Cependant, avoir des paramètres de pénalité très grands conduit à des problèmes de mauvais conditionnements numériques. Dans le cas d'une phase de « glissement », pour les mêmes raisons évoquées précédemment, les contraintes de contact considérées sont :

$$C_c^{Pslip} = \int_{\Gamma_c} (\epsilon_n \bar{g}_n \delta \bar{g}_n + \sigma_t \cdot \delta \mathbf{g}_t) d\Gamma, \quad \epsilon_n > 0 \quad (2.46)$$

Enfin, la méthode de pénalité peut être considérée physiquement comme une prise en compte de l'élasticité des contacts provenant des aspérités des surfaces en contact. Il faut signaler que cette méthode peut, lors d'intégrations temporelles, exhiber des phénomènes d'oscillations rapides qui ne correspondent en rien à la physique du problème.

### 2.1.5.3 Méthode des Lagrangiens augmentés

Cette méthode consiste à augmenter le multiplicateur de Lagrange usuel par un terme de pénalisation. Dans un soucis de concision, nous ne développerons que le cas d'un contact normal sans frottement, une généralisation étant disponible dans [95].

La contribution des contraintes dans le cas d'un contact normal s'exprime par :

$$\Pi_{c_n}^{LA} = \begin{cases} \int_{\Gamma_c} (\lambda_n g_n + \frac{\epsilon_n}{2} g_n^2) d\Gamma & \text{pour } \hat{\lambda}_n \leq 0 \\ \int_{\Gamma_c} -\frac{1}{2\epsilon_n} |\lambda_n|^2 d\Gamma & \text{pour } \hat{\lambda}_n > 0 \end{cases} \quad (2.47)$$

avec  $\hat{\lambda}_n = \lambda_n + \epsilon_n g_n$ . Cette fonctionnelle est valable aussi bien pour  $\hat{\lambda}_n \leq 0$  que pour  $\hat{\lambda}_n > 0$ , ce dernier cas signifiant que le jeu est positif. Les contraintes de contact normal sont données par la variation de 2.47 :

$$C_{c_n}^{LA} = \begin{cases} \int_{\Gamma_c} (\hat{\lambda}_n \delta g_n + \delta \lambda_n g_n) d\Gamma & \text{pour } \hat{\lambda}_n \leq 0 \\ \int_{\Gamma_c} -\frac{1}{\epsilon_n} \lambda_n \delta \lambda_n d\Gamma & \text{pour } \hat{\lambda}_n > 0 \end{cases} \quad (2.48)$$

Une version simplifiée de cette fonctionnelle, connue sous le nom d'algorithme d'Uzawa, consiste à considérer un multiplicateur de Lagrange  $\bar{\lambda}_n$  constant au cours d'une itération de résolution de la forme faible puis, d'en déduire une actualisation. Dans ce cas, la contribution des contraintes de contact normal dans la forme faible s'écrit :

$$C_{c_n}^{UZ} = \int_{\Gamma_c} (\bar{\lambda}_n + \epsilon_n g_n) \delta g_n d\Gamma \quad (2.49)$$

et l'actualisation du multiplicateur de Lagrange à l'étape  $k+1$  à partir de l'itération  $k$  s'écrit :

$$\bar{\lambda}_n^{k+1} = \bar{\lambda}_n^k + \epsilon_n g_n^{k+1} \quad (2.50)$$

Cette méthode possède deux avantages principaux :

- elle rend la fonctionnelle de contact convexe autour de la solution, facilitant ainsi la résolution du problème ;
- elle permet d'approcher la solution exacte avec un paramètre de pénalité  $\epsilon_n$  faible, évitant ainsi des problèmes de conditionnement.

Malheureusement, la vitesse de convergence dépend fortement du paramètre de pénalité qui doit alors être choisi prudemment.

## 2.2 Etat de l'art du contact rotor/stator

Comme il a été précisé en introduction, la recherche de rendement maximum des turboréacteurs fait tendre la conception de ceux-ci vers des jeux entre parties fixes et parties mobiles de plus en plus réduits, ayant ainsi pour conséquence une augmentation du risque de prise de contact. Depuis une vingtaine d'années, les recherches se sont multipliées pour tenter de comprendre les phénomènes intervenant lors de cette prise de contact et ainsi de prédire les comportements vibratoires qui en résultent. Deux principaux axes de recherche peuvent être dégagés : d'une part la détermination des contraintes et du comportement thermique au voisinage du contact et d'autre part, le comportement dynamique global des deux structures interagissant.

De nombreuses publications en tribologie se sont concentrées sur la caractérisation des matériaux abrasables qui diminuent les conséquences des contacts frottants. En effet, afin de diminuer la violence d'éventuels contacts et aussi d'assurer autant que possible un jeu minimal entre les aubes de la soufflante et le carter, un matériau tendre, dit « abrasable », est placé sur la face intérieure de ce dernier de sorte que le jeu soit nul avant toute utilisation. Ainsi, dès les premières rotations de la soufflante, ses aubes vont usiner le matériau assurant ainsi un jeu minimum en fonctionnement.

Ce dernier doit avoir deux propriétés contradictoires : il doit d'une part pouvoir résister à l'érosion à laquelle il est soumis à cause des particules solides circulant à grande vitesse dans les gaz et d'autre part, il doit, en cas de contact entre le carter et le bout des aubes, endommager le moins possible ces dernières.

Ce sont en général des matériaux composites poreux composés d'une phase métallique et d'une phase non métallique (généralement un polymère), dont l'usure par érosion est principalement fonction de leur porosité, de la proportion de phase non métallique ainsi que de la cohésion des particules métalliques. Les mécanismes d'usure par érosion de ces matériaux sont assez bien connus [59].

Quant aux mécanismes d'usure par abrasion, ils sont relativement complexes. En effet, comme le montrent de nombreux travaux de GE Research&Development Center [15, 14, 86], ils vont dépendre de la vitesse d'abrasion et du taux d'incursion de l'aube dans le carter. Ils se font majoritairement par ablation de matière, qui elle-même peut se faire par des mécanismes de fusion, de transferts par adhésion ou encore de coupures et micro-coupures. Des essais expérimentaux ont également montré la possibilité de densification de ces matériaux ainsi que de déformations plastiques et d'écrouissage [92].

En ce qui concerne le comportement dynamique des structures en contact, un état de l'art concernant les modèles les plus employés ainsi que les conclusions générales associées est réalisé ci-après. D'une façon générale, deux grandes catégories de comportements peuvent être faites, suivant que les contacts entre rotor et stator soient intermittents ou permanents au cours du mouvement de précession du rotor, celui-ci pouvant d'ailleurs être soit direct, soit rétrograde. Généralement, la transition entre l'une et l'autre des deux catégories se fait graduellement : d'abord des contacts intermittents puis, en cas d'aggravation, un contact permanent avec de fortes vibrations.

Les modèles de rotor les plus utilisés dans ces études consistent essentiellement en des Jeffcott (également appelés rotor DeLaval) [70, 43] c'est-à-dire des rotors composés d'un arbre flexible sans masse avec un disque rigide modélisé par une masse ponctuelle. Celui-ci possède généralement un ou deux degrés de liberté. Concernant le stator, il peut être rigide ou posséder également deux degrés de liberté.

L'un des premiers à expliquer le comportement d'un rotor frottant sur une partie fixe fut Den Hartog [18]. Grâce à un modèle de rotor rigide, il mis en évidence un mouvement de tournoisement rétrograde instable du rotor, en contact permanent avec un stator, à cause de la force de friction. Ehrich [21] releva cependant que ci cette explication était juste, toutes les machines tournantes seraient instables dès les premiers contacts entre les parties fixes et les parties tournantes, ce qui n'est manifestement pas le cas. Comme explication, il mit en avant la nécessité de considérer un rotor flexible et obtint un critère de stabilité impliquant le ratio des amortissements fixe sur mobile, comme expliqué en section 1.3.5.

La présence de jeu entre le rotor et le carter ou encore entre l'arbre du rotor et un palier rend le système non linéaire. Ehrich [25] a d'ailleurs montré très tôt que la présence de jeu était à l'origine d'hystérésis de la réponse du rotor suivant que sa vitesse croisse ou décroisse. En effet, le contact permanent de ces deux structures (qui peut être à l'origine d'un mouvement de précession direct du stator) engendre une rigidification locale qui décale le pic de résonance vers une fréquence plus grande. Ceci a comme autre conséquence de générer des sauts d'amplitudes du système pour des vitesses de rotation proches de la fréquence propre du stator. Wu et Chen [96] montrent eux aussi que la présence du jeu entre un rotor ayant deux degrés de liberté et un stator rigide est à l'origine de nombreux types potentiels de bifurcation.

En ce qui concerne la force de contact entre la partie fixe et la partie tournante, sa composante normale est très largement modélisée par une raideur de pénalité c'est-à-dire que lorsque le jeu est consommé, elle est proportionnelle à un coefficient  $k$ , généralement très élevé, assimilable à une raideur, que multiplie la pénétration du rotor dans le stator (Cf. section 2.1.5). Le frottement est modélisé classiquement par une loi de Coulomb. Ainsi, Beatty [2] a proposé une expression pour la force de contact, dans le cas où le stator est parfaitement rigide, de la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} = -\frac{k(R - \delta)}{R} \begin{bmatrix} 1 & -\mu \\ \mu & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

où  $R = \sqrt{x^2 + y^2}$  et  $\delta$  est le jeu entre rotor et stator. Il montre ainsi que les harmoniques d'ordre deux et trois de la réponse synchrone d'un rotor sont générées lors de contacts frottants avec le stator. Il définit alors la limite du contact « doux » par un contact entre rotor et stator sur un arc inférieur à  $270^\circ$  ou encore par des contributions des harmoniques deux et trois inférieures à 75% et 50% respectivement de la réponse synchrone du rotor.

Choi et Bae [8] ont d'ailleurs montré une meilleure adéquation entre un modèle de contact par pénalité et des mesures expérimentales utilisant un rotor Bently et un carter rigide, que dans le cas d'un modèle de rebond élastique. Ce dernier modèle impose la condition de non-pénétration des deux structures et considère qu'au point de contact, la variation de la vitesse normale s'écrit :  $v_{n+} = -ev_{n-}$  où  $e$  est le coefficient de restitution. Selon eux, la friction aurait une influence prédominante sur la réponse tangente (circonférentielle) du rotor alors que la raideur de contact influencerait en priorité sur sa réponse normale. Durant l'interaction, les impacts et la friction généreraient un mouvement de précession rétrograde du rotor. Pour terminer, passé la vitesse critique, le rotor peut subir des sauts, des réponses sous et super harmoniques voire du chaos si le jeu est suffisant. Dans le cas où l'arbre d'un rotor Jeffcott frotte contre un palier, Choi et Noah [10] montrent également que des réponses sous et super-harmoniques peuvent apparaître. Ce même type de modèle a permis à Kim et Noah [47] de mettre en évidence des réponses quasi-périodiques du rotor, par une approche fréquentielle même en l'absence de frottement. Goldman et Muszynska [32, 66] montrent quant à eux que l'interaction entre un rotor et un stator ayant chacun deux degrés de liberté donne lieu à des réponses harmoniques et sous-harmoniques ainsi qu'à des réponses chaotiques.

De nombreux autres auteurs confirment la très grande diversité des réponses de tels systèmes, à savoir que le contact frottant entre un rotor et un stator est à l'origine de nombreuses bifurcations ainsi que de réponses quasi-périodiques et chaotiques [78, 98, 13, 45, 31, 88].

Feng et Zhang [26] montrent, dans le cas d'un rotor ayant deux degrés de liberté impactant un stator rigide, que sous certaines conditions le contact perdure même si la perturbation initiale a disparu. Dans le cas de contact sans friction, le contact permanent se manifeste par un mouvement de précession direct alors qu'en présence de frottement, ce dernier se manifeste par un mouvement de précession rétrograde.

Lingener [57] étudia expérimentalement ce comportement rétrograde du rotor en présence de frottement. Selon lui, il est impossible de passer la fréquence naturelle du système couplé rotor-stator excité par précession rétrograde. Une augmentation de la vitesse de rotation du rotor aurait pour effet d'augmenter les glissements entre les deux structures sans pour autant augmenter la fréquence du système.

Choy et Padovan [11] expliquent que plus le coefficient de frottement est élevé, plus le transfert énergétique entre le mouvement rotatif du rotor et les vibrations transversales du système couplé rotor-stator est efficace. Ainsi, ils montrent que plus le coefficient de frottement est grand, plus le mouvement de tournoiement rétrograde du rotor s'initie rapidement. Choi [9] montre d'ailleurs que le coefficient de frottement est responsable de l'apparition de roulement sans glissement du rotor au cours de son mouvement de tournoiement rétrograde à l'intérieur d'un stator rigide.

Edwards et *al.* [20] montrent quant à eux qu'un modèle de rotor prenant en compte à la fois la torsion et la flexion de l'arbre d'un rotor impactant un stator rigide tend à être plus stable qu'un modèle ne considérant que la flexion. Ceci peut être expliqué par un transfert énergétique entre les deux modes associés ou par l'amortissement du degré de liberté de torsion.

Goldman et Muszynska [33] ont étudié le couplage thermomécanique d'un rotor en cas de frottement entre l'arbre et une partie fixe. Ils ont ainsi montré que le frottement pouvait, par échauffement, dilater l'arbre, accentuer sa courbure et donc son balourd. En régime sous-critique, le balourd ayant une action centrifuge, le frottement contribue à augmenter la force de friction qui elle même augmente l'échauffement et ainsi de suite. En régime sur-critique, c'est l'inverse : le balourd à une action centripète et donc le frottement contribue à diminuer le balourd dû à l'excentration du centre de gravité.

Pour terminer, on peut citer certaines études expérimentales telles celles de Chu et Lu [12] qui attestent également d'une très grande diversité de comportements dynamiques.

## 2.3 Conclusion

Dans ce chapitre, les contraintes à prendre en compte en mécanique lors d'un contact entre solides ont été explicitées. Les formulations fortes et faibles du problème de dynamique associé ont également été développés. Trois techniques de gestion du contact couramment utilisées ont été détaillées, chacune possédant des avantages mais également des inconvénients. On peut retenir que les multiplicateurs de Lagrange ont le mérite de considérer rigoureusement les contraintes dues au contact mais rajoutent des degrés de liberté supplémentaires. La pénalisation quant à elle, est très simple à mettre en œuvre mais ses résultats dépendent fortement du paramètre de pénalité et peut ainsi engendrer des comportements non réalistes. L'état de l'art du contact rotor/stator a mis en évidence une très grande diversité des comportements dynamiques des systèmes, allant des réponses périodiques aux régimes chaotiques, en passant par les réponses quasi-périodiques. L'obtention de tels régimes dynamiques nécessite des méthodes particulières prenant en compte les non linéarités du système ainsi que celles dues au contact. De telles méthodes sont présentées dans le chapitre suivant.



## Chapitre 3

# Estimation du comportement non linéaire

Les chapitres précédents ont mis en évidence une dynamique très riche des systèmes tournants soumis à des phénomènes de contacts. Dans ce chapitre, des méthodes d'obtention de régimes dynamiques de systèmes non linéaires sont présentées. Un accent particulier sera mis sur la détermination de réponses périodiques.

Le comportement dynamique d'une structure s'obtient par résolution de l'équation différentielle d'ordre deux en temps régissant son équilibre. Dans le cas de systèmes possédant des non linéarités faibles c'est-à-dire dont une linéarisation au premier ordre est peu différente du système non linéaire lui-même, des méthodes permettant d'obtenir analytiquement une solution approchée de l'équation différentielle peuvent être utilisées. On peut citer par exemple les méthodes de perturbations telle la méthode des échelles multiples développée par Nayfeh et Balachandran [68]. Cependant, ces méthodes peuvent difficilement être mises en œuvre sur des systèmes de taille importante.

Dans le cas de systèmes possédant de nombreux degrés de liberté et des non linéarités fortes, il n'est plus possible d'obtenir l'expression analytique de la solution, même approchée, de l'équation différentielle régissant leur comportement. Il convient alors de faire appel à des méthodes numériques. Deux grandes catégories de méthodes existent : les méthodes temporelles [35] et les méthodes fréquentielles [72], toutes deux permettant de se ramener à un système d'équations algébriques. Les méthodes fréquentielles permettent de déterminer des régimes périodiques voire quasi-périodiques alors que les méthodes temporelles permettent également de déterminer des régimes chaotiques.

Compte tenu du caractère numérique du problème, lorsqu'un paramètre du système varie, telle la vitesse de rotation d'un rotor, il est nécessaire d'effectuer un calcul pour chacune des valeurs prise par ce dernier. Ainsi, les méthodes précédentes peuvent être couplées à un algorithme de type prédicteur/correcteur dénommé méthode de continuation [3].

Dans ce qui suit, les méthodes temporelles puis les méthodes fréquentielles seront développées. Ensuite, quelques algorithmes de continuation seront détaillés. Enfin, ces méthodes



développées et utilisées au cours de cette thèse seront validées sur un cas simple de contact rotor/stator ayant fait l'objet de publications antérieures.

### 3.1 Méthodes temporelles

L'intégration temporelle constitue une approche intuitive de résolution d'un système d'équations différentielles du second ordre en temps. En effet, son application à un problème de dynamique consiste à considérer les conditions initiales du problème puis, à construire la solution progressivement dans le temps, pas à pas, jusqu'à l'obtention d'un régime permanent. Ces méthodes peuvent s'appliquer à tous les types de problèmes. Cependant, le temps de calcul nécessaire, lors d'une intégration directe, pour s'affranchir du régime transitoire peut être excessif. Dans le cas de la recherche d'une solution périodique, il convient d'utiliser des méthodes temporelles alternatives comme la méthode de tirs.

#### 3.1.1 Les intégrateurs temporels

Les intégrateurs temporels, ou encore méthodes d'intégration directe, sont des procédures numériques qui permettent de traiter des équations différentielles. Ils sont très largement répandus du fait de leur simplicité de mise en œuvre et de leur aptitude à traiter tous types de systèmes, aussi bien linéaires que non linéaires.

##### 3.1.1.1 Principe d'un intégrateur temporel

Considérons l'équation matricielle du comportement dynamique d'un corps, obtenue en procédant comme dans la section 1.2.2 :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \tilde{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{q}}(t) + \tilde{\mathbf{K}}\mathbf{q}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (3.1)$$

où  $\mathbf{M}$ ,  $\tilde{\mathbf{C}}$  et  $\tilde{\mathbf{K}}$  sont les matrices de masse, d'amortissement généralisée et de raideur généralisée du système. Le vecteur  $\mathbf{F}$  représente quant à lui les forces s'appliquant à ce dernier.

La résolution de cette équation consiste à vérifier cette relation en plusieurs instants consécutifs  $t_k$ . Pour cela, l'équation du mouvement est discrétisée dans le temps. Des hypothèses sont faites concernant les variations des déplacements, des vitesses et des accélérations durant chaque intervalle de temps  $[t_k, t_{k+1}]$ . L'intervalle de temps  $h$  entre ces deux instants peut être constant ou variable pendant la procédure de calcul. Ceci conduit à des algorithmes pas-à-pas qui fournissent des approximations successives de ces trois champs.

La discrétisation de l'équation 3.1 peut se faire soit en effectuant des développements en série de Taylor des différentes grandeurs, soit en utilisant une méthode de résidus pondérés. Nous allons développer ces deux points dans les paragraphes suivants.

#### Développement de Taylor

Supposons toutes les grandeurs, les déplacements  $\mathbf{q}_k$ , les vitesses  $\dot{\mathbf{q}}_k$  et les accélérations  $\ddot{\mathbf{q}}_k$  connues à l'instant  $t_k$ . L'objectif étant de déterminer ces dernières à l'instant  $t_{k+1} = t_k + h =$

$t_k + \theta \Delta t$  avec  $\theta > 0$ , effectuons un développement de Taylor des déplacements et des vitesses à l'instant désiré :

$$\begin{cases} \mathbf{q}_{k+1} = \mathbf{q}_k + h\dot{\mathbf{q}}_k + \int_{t_k}^{t_k+h} \ddot{\mathbf{q}}(\tau) d\tau \\ \dot{\mathbf{q}}_{k+1} = \dot{\mathbf{q}}_k + \int_{t_k}^{t_k+h} \ddot{\mathbf{q}}(\tau) d\tau \end{cases} \quad (3.2)$$

Le calcul des intégrales d'accélération peut se faire par quadrature en exprimant  $\ddot{\mathbf{q}}(\tau)$  dans l'intervalle  $[t_k, t_{k+1}]$  en fonction de  $\ddot{\mathbf{q}}_k$  et  $\ddot{\mathbf{q}}_{k+1}$ . Il vient ainsi [35] :

$$\begin{cases} \mathbf{q}_{k+1} = \mathbf{q}_k + h\dot{\mathbf{q}}_k + \frac{h^2}{2} ((1-\beta)\ddot{\mathbf{q}}_k + \beta\ddot{\mathbf{q}}_{k+1}) \\ \dot{\mathbf{q}}_{k+1} = \dot{\mathbf{q}}_k + h((1-\alpha)\ddot{\mathbf{q}}_k + \alpha\ddot{\mathbf{q}}_{k+1}) \end{cases} \quad (3.3)$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont les paramètres de la quadrature utilisée et correspondent à des schémas d'intégrations différents. Par exemple, pour un schéma à accélération constante sur l'intervalle  $[t_k, t_{k+1}]$ , cell-ci peut s'exprimer par  $\ddot{\mathbf{q}}_k = \ddot{\mathbf{q}}_{k+1} = (\ddot{\mathbf{q}}_k + \ddot{\mathbf{q}}_{k+1})/2$ . Les paramètres correspondant sont  $\alpha = \beta = 1/2$ . Pour un schéma à accélération linéaire sur l'intervalle  $[t_k, t_{k+1}]$ , les paramètres correspondants sont  $\alpha = 1/2$  et  $\beta = 1/3$ .

Ainsi, l'équation 3.1 du comportement dynamique du système, dont les grandeurs sont inconnues à l'instant  $t_{k+1}$  peut s'écrire, compte-tenu des expressions supposées de celles-ci (Cf. équation 3.3) :

$$\begin{aligned} \left( \mathbf{M} + \alpha h \tilde{\mathbf{C}} + \frac{\beta h^2}{2} \tilde{\mathbf{K}} \right) \mathbf{q}_{k+1} = \frac{\beta h^2}{2} \mathbf{F}_{k+1} + \mathbf{M} \left( \mathbf{q}_k + h\dot{\mathbf{q}}_k + \frac{h^2}{2} (1-\beta) \ddot{\mathbf{q}}_k \right) \\ + \tilde{\mathbf{C}} \left( \alpha h \mathbf{q}_k + \frac{h^2}{2} (2\alpha - \beta) \dot{\mathbf{q}}_k + \frac{h^3}{3} (\alpha - \beta) \ddot{\mathbf{q}}_k \right) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Cette unique formulation synthétise deux grandes familles de schémas d'intégration temporelle :

- $\theta = 1$  c'est-à-dire,  $h = \Delta t$ , correspond à la famille des schémas d'intégration de Newmark. Les inconnues sont calculées à l'instant  $t_{k+1}$  à partir des grandeurs connues à l'instant  $t_k$ . Suivant les valeurs des paramètres  $\alpha$  et  $\beta$ , le schéma peut être stable ou non comme nous le verrons par la suite.
- si  $\theta > 1$ , il s'agit d'un schéma d'intégration de Wilson. Généralement,  $\theta$  est pris égal à 1,4 et les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  correspondent au cas d'accélération linéaire. Il est utile de préciser que ce schéma est inconditionnellement stable pour  $\theta \geq 1,32$ .

### Méthode de résidus pondérés

Une autre façon d'obtenir un schéma d'intégration consiste, au lieu d'exprimer les variations des déplacements et vitesses par des développements en série de Taylor, à interpoler ces grandeurs de façon continue par morceaux sur des intervalles. Pour cela, il est nécessaire de considérer des fonctions de forme qui vont supposer l'évolution des grandeurs entre des instants précis. Considérons ainsi trois temps  $t_{k-1}$ ,  $t_k$  et  $t_{k+1}$ . Les déplacements  $\mathbf{q}_t$  pour tout  $t \in [t_{k-1}, t_{k+1}]$  peuvent être interpolés à partir de leurs valeurs aux trois instants précédents  $\mathbf{q} = [\mathbf{q}_{k-1}, \mathbf{q}_k, \mathbf{q}_{k+1}]^T$ . Pour ce faire, définissons une variable locale  $\zeta = (t - t_k) / \Delta t$ . On cherche

alors à écrire  $\mathbf{q}_t = \mathbf{N}(\zeta)^T \mathbf{q}$  où  $\mathbf{N} = [N_1, N_2, N_3]^T$  sont les fonctions de forme en temps. L'interpolation se faisant sur trois points, l'expression de  $\mathbf{q}_t$  est un polynôme d'ordre deux en  $\zeta$  et doit vérifier  $\mathbf{q}_{k-1} = \mathbf{q}_t(\zeta = -1)$ ,  $\mathbf{q}_k = \mathbf{q}_t(\zeta = 0)$  et  $\mathbf{q}_{k+1} = \mathbf{q}_t(\zeta = 1)$ . On en déduit alors l'expression des fonctions de forme :

$$N_1(\zeta) = \frac{\zeta(\zeta-1)}{2}; \quad N_2(\zeta) = 1 - \zeta^2; \quad N_3(\zeta) = \frac{\zeta(\zeta+1)}{2} \quad (3.5)$$

ainsi que les interpolations suivantes :

$$\begin{cases} \mathbf{q}_t = N(\zeta)^T \mathbf{q} = \frac{\zeta(\zeta-1)}{2} \mathbf{q}_{k-1} + (1 - \zeta^2) \mathbf{q}_k + \frac{\zeta(\zeta+1)}{2} \mathbf{q}_{k+1} \\ \dot{\mathbf{q}}_t = N_{,t}(\zeta)^T \mathbf{q} = \frac{1}{\Delta t} ((\zeta - 1/2) \mathbf{q}_{k-1} - 2\zeta \mathbf{q}_k + (\zeta + 1/2) \mathbf{q}_{k+1}) \\ \ddot{\mathbf{q}}_t = N_{,tt}(\zeta)^T \mathbf{q} = \frac{1}{\Delta t^2} (\mathbf{q}_{k-1} - 2\mathbf{q}_k + \mathbf{q}_{k+1}) \\ \mathbf{F}_t = N(\zeta)^T \mathbf{F} = \frac{\zeta(\zeta-1)}{2} \mathbf{F}_{k-1} + (1 - \zeta^2) \mathbf{F}_k + \frac{\zeta(\zeta+1)}{2} \mathbf{F}_{k+1} \end{cases} \quad (3.6)$$

Avec ces approximations, l'équation du comportement dynamique du système 3.1 n'est pas rigoureusement vérifiée. Nous pouvons, comme dans le cas de la formulation faible d'un problème de dynamique (Cf. section 2.1.4.2), annuler le résidu en utilisant une méthode de résidus pondérés. Cela revient à :

$$\int_{-1}^1 W(\zeta) \left( \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}_t + \tilde{\mathbf{C}} \dot{\mathbf{q}}_t + \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{q}_t - \mathbf{F}_t \right) d\zeta = 0, \quad \forall W(\zeta) \quad (3.7)$$

ce qui s'écrit, une fois les expressions 3.6 prises en compte :

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\mathbf{M}}{\Delta t^2} + \theta_1 \frac{\tilde{\mathbf{C}}}{\Delta t} + \frac{\theta_2}{2} \tilde{\mathbf{K}} \right) \mathbf{q}_{k+1} = \frac{\theta_2}{2} \mathbf{F}_{k+1} + \left( \frac{1}{2} - \theta_2 + \theta_1 \right) \mathbf{F}_k + \left( \frac{1}{2} - \theta_1 + \frac{\theta_2}{2} \right) \mathbf{F}_{k-1} \\ & + \left( 2 \frac{\mathbf{M}}{\Delta t^2} + (2\theta_1 - 1) \frac{\tilde{\mathbf{C}}}{\Delta t} + \left( \theta_2 - \theta_1 - \frac{1}{2} \right) \tilde{\mathbf{K}} \right) \mathbf{q}_k - \left( \frac{\mathbf{M}}{\Delta t^2} + (\theta_1 - 1) \frac{\tilde{\mathbf{C}}}{\Delta t} + \left( \frac{\theta_2}{2} - \theta_1 + \frac{1}{2} \right) \tilde{\mathbf{K}} \right) \mathbf{q}_{k-1} \end{aligned} \quad (3.8)$$

où  $\theta_1$  et  $\theta_2$  ont les expressions suivantes :

$$\theta_1 = \frac{\int_{-1}^1 W(\zeta) (\zeta + 1/2) d\zeta}{\int_{-1}^1 W(\zeta) d\zeta}; \quad \theta_2 = \frac{\int_{-1}^1 W(\zeta) \zeta (\zeta + 1) d\zeta}{\int_{-1}^1 W(\zeta) d\zeta} \quad (3.9)$$

Cette formulation de type éléments finis est très générale et permet, en fonction des valeurs de  $\theta_1$  et  $\theta_2$ , c'est-à-dire en fonction de la fonction test  $W$ , de retrouver tous les schémas d'intégration classiques à trois points. Les équivalences seront précisées dans le paragraphe suivant. On peut notamment remarquer que cette formulation est équivalente à un schéma d'intégration de Newmark avec  $\theta_1 = \alpha$  et  $\theta_2 = \beta$ .

### 3.1.1.2 Classification des schémas

Les schémas d'intégration sont généralement classés en deux catégories : les explicites et les implicites. Les schémas explicites cherchent la solution à l'instant  $t_{k+1}$  à partir de la solution connue à l'instant  $t_k$  alors que les schémas implicites recherchent la solution à partir

de l'équation du mouvement elle-même, à l'instant  $t_{k+1}$ . Ils nécessitent des inversions matricielles à chaque pas de temps et donc, une allocation mémoire supérieure au cas d'un schéma explicite. Ceux-ci ont quant à eux besoin d'un pas de temps relativement faible pour des questions de stabilité (Cf. paragraphe suivant). Les schémas implicites sont surtout utilisés pour des problèmes dans lesquels la réponse est dominée par un petit nombre de modes à basses fréquences alors que les schémas explicites sont utilisés dans des problèmes de dynamique rapide où interviennent des hautes et moyennes fréquences. Le tableau suivant récapitule le type des algorithmes évoqués au paragraphe précédent ainsi que les fonctions test à considérer dans le cas d'une démarche basée sur la méthode de résidus pondérés pour retrouver les schémas classiques avec  $\theta_1 = \alpha$  et  $\theta_2 = \beta$ .

nom	paramètres	fonction test	type
accélération linéaire	$\alpha = 1/2, \beta = 1/3$	$W = 1$	implicite
accélération constante	$\alpha = 1/2, \beta = 1/2$	$W =  \zeta $	implicite
Fox Goodwin	$\alpha = 1/2, \beta = 1/6$	$W = 1 -  \zeta $	explicite
différences finies centrées	$\alpha = 1/2, \beta = 0$	$W = \delta(\zeta)$	explicite
différences finies à droite	$\alpha = 3/2, \beta = 2$	$W = \delta(\zeta - 1)$	implicite

TAB. 3.1 – Caractéristiques de quelques schémas d'intégration temporelle

### 3.1.1.3 Analyse de stabilité

Pour établir la convergence d'un intégrateur, il est essentiel d'étudier la stabilité du schéma numérique associé.

Tout d'abord, l'équation du mouvement va être écrite sous forme d'état. Il est en effet usuel en dynamique de reformuler celle-ci comme suit :

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{K}} & -\mathbf{M}^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{C}} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{F} \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

où le vecteur d'état  $\mathbf{Y} = [\mathbf{q} \ \dot{\mathbf{q}}]^T$  est donc composé des déplacements et des vitesses. La taille de ce système est multipliée par deux mais, son ordre passe à un.

Un schéma d'intégration directe est dit stable s'il existe un pas d'intégration  $h_0 > 0$  tel que pour tout  $h \in [0, h_0]$ , une perturbation finie du vecteur d'état à l'instant  $t_n$  n'entraîne qu'une modification non croissante du vecteur d'état calculé à un instant ultérieur  $t_{n+j}$ .

Il est possible, compte tenu des schémas d'intégration présentés précédemment, de définir une relation de récurrence entre le vecteur d'état  $\mathbf{Y}_k$  calculé à l'instant  $t_k$  et le vecteur d'état  $\mathbf{Y}_{k-1}$  calculé à l'instant  $t_{k-1}$  par :

$$\mathbf{Y}_k = \mathbf{A}(h) \cdot \mathbf{Y}_{k-1} + \mathbf{b}_{k-1}(h) \quad (3.11)$$

La matrice  $\mathbf{A}$  d'ordre  $2N \times 2N$ ,  $N$  étant le nombre de degrés de liberté, est la matrice d'amplification de l'opérateur d'intégration et est propre au système étudié. Le vecteur  $\mathbf{b}$  dépend quant à lui de l'excitation appliquée au système. Tous deux dépendent des paramètres du schéma tels  $\alpha$  et  $\beta$ . On peut par extension écrire la relation :

$$\mathbf{Y}_k = \mathbf{A}^k(h) \cdot \mathbf{Y}_0 + \sum_{j=1}^k \mathbf{A}^{j-1}(h) \cdot \mathbf{b}_{k-j}(h) \quad (3.12)$$

Conformément à la définition donnée précédemment, le schéma numérique ne sera stable que si  $\|\mathbf{A}\| \leq 1$ . Ainsi, en considérant le rayon spectral de la matrice  $\mathbf{A}$  défini par  $\rho(\mathbf{A}) = \max(\lambda_i)$ , les  $\lambda_i$  étant ses valeurs propres, un critère de stabilité s'écrit :

$$\rho(\mathbf{A}) \leq 1 \quad (3.13)$$

Puisque que  $\mathbf{A}$  dépend de  $h$  c'est-à-dire du pas de temps, la stabilité d'un schéma numérique va dépendre ou non de celui-ci. En effet, les schémas implicites ont l'avantage d'être inconditionnellement stables. Ainsi, un pas de temps petit assurera uniquement une meilleure précision de l'algorithme et n'aura pas d'influence sur sa convergence. Par contre, les schémas explicites peuvent être instables si leur pas de temps est supérieur à un pas de temps critique généralement fonction de la fréquence maximale du système [35]. Cependant, on peut remarquer que ces schémas étant utilisés pour des problèmes de dynamique rapide, il est de toute façon indispensable de travailler avec des pas de temps très faibles.

Dans le cas de l'algorithme de Newmark, il est possible de tracer ses zones de stabilité en fonction des paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  comme l'illustre la figure 3.1 (où  $\omega$  est la pulsation du système).

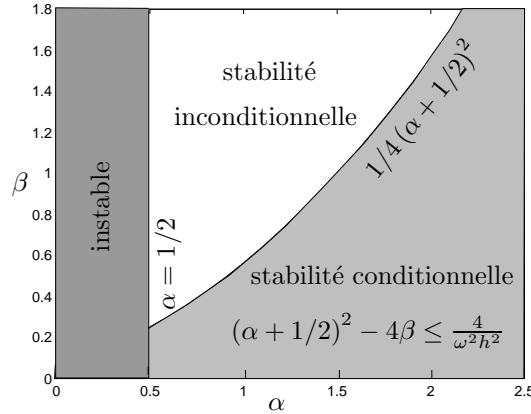


FIG. 3.1 – Stabilité de l'algorithme de Newmark

#### 3.1.1.4 Etude de la précision

La stabilité numérique d'un algorithme n'assure pas que l'intégrateur suive la solution exacte du système d'équations différentielles. Afin de quantifier l'écart entre la solution numérique et la solution exacte recherchée, considérons une structure conservative (non amortie) en

régime libre c'est-à-dire non soumise à des excitations extérieures. Dans un souci de simplicité, plaçons nous dans le cas d'un système à un degré de liberté. Il existe alors une relation entre l'état exact de celui-ci à l'instant  $t_k$  et son état antérieur, à l'instant  $t_{k-1}$ , tous deux ayant la pulsation  $\omega_0$ . Celle-ci s'écrit comme suit :

$$\mathbf{Y}(t_k) = \begin{pmatrix} q(t_k) \\ \dot{q}(t_k) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\omega_0 h) & \sin(\omega_0 h) / \omega_0 \\ -\omega_0 \sin(\omega_0 h) & \cos(\omega_0 h) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q(t_{k-1}) \\ \dot{q}(t_{k-1}) \end{pmatrix} = \hat{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{Y}(t_{k-1}) \quad (3.14)$$

La matrice  $\hat{\mathbf{A}}$  qui lie la solution exacte aux instants  $t_k$  et  $t_{k-1}$  doit alors être comparée à la matrice  $\mathbf{A}$  de l'équation 3.11 associée à la solution numérique. La comparaison des modules et des phases des valeurs propres de ces deux matrices ( $\hat{\lambda}_{1,2} = e^{\pm i\omega_0 h}$  pour  $\hat{\mathbf{A}}$  et  $\lambda_{1,2} = \rho(\mathbf{A}) e^{\pm i\phi}$  pour  $\mathbf{A}$ ) donne une mesure de la précision du schéma. On peut ainsi définir les erreurs relatives d'amplitude  $\epsilon_a$  et de périodicité  $\epsilon_p$  par :

$$\begin{cases} \epsilon_a = \rho(\mathbf{A}) - 1 \\ \epsilon_p = \omega_0 h / \phi - 1 \end{cases} \quad (3.15)$$

L'erreur de périodicité représente la distorsion en fréquence du schéma d'intégration. Elle est toujours plus importante que l'erreur d'amplitude qui représente quant à elle l'amortissement numérique de la solution. On parle de dissipation numérique. Ainsi, les intégrateurs agissent comme des filtres dont l'efficacité peut être quantifiée par le rayon spectral de matrice d'amplification. En hautes fréquences, il se peut que certains modes n'aient pas de signification physique et donc ce filtre peut s'avérer utile alors qu'en basses fréquences, il est primordial de ne pas affecter les modes sous peine de détériorer la solution.

### 3.1.1.5 Cas des problèmes non linéaires

Les remarques faites concernant la précision des schémas d'intégration ainsi que leur stabilité ne sont valables que pour des systèmes linéaires. En effet, dès qu'une non linéarité est introduite, la convergence de ceux-ci n'est plus assurée. De même, la stabilité inconditionnelle des schémas implicites n'est plus vraie. Un pas de temps critique est alors à prendre en compte aussi bien pour les schémas explicites que pour les implicites mais ce dernier ne peut plus être défini de façon analytique. De plus, dans le cas non linéaire, une instabilité du schéma d'intégration peut se traduire non plus par une divergence de la solution mais par une solution erronée. Il convient alors de vérifier la validité des résultats en faisant deux intégrations temporelles avec des pas de temps différents et de montrer que le résultat est indépendant du pas de temps.

Pour des oscillateurs non linéaires simples possédant par exemple une non linéarité cubique, il s'avère que la méthode des différences finies centrées donnent de bons résultats dès que  $h < T/20$ ,  $T$  étant la période du système, alors que les schémas d'intégration de Wilson amènent des erreurs importantes à cause de leur fort amortissement numérique pour  $h > T/50$ . La méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 reste quant à elle la plus précise pour un pas de temps faible. C'est la raison pour laquelle elle sert souvent de référence sur des cas simples mais est peu utilisée pour des systèmes importants car trop coûteuse numériquement. Dans tous

les cas, pour des pas de temps  $h > T/5$  divers problèmes de non convergence ou de solution numériquement chaotique ou encore de solution erronée peuvent apparaître [97].

### 3.1.2 La méthode de shooting

Tout système linéaire soumis à une excitation mono-harmonique répond, une fois son régime permanent établi, de façon mono-harmonique. Ceci n'est cependant plus toujours vrai pour des systèmes non linéaires et on observe dans certains cas des réponses quasi-périodiques ou chaotiques. Néanmoins, le cas des réponses périodiques est très fréquent et nécessite donc des considérations particulières.

En effet, comme il l'a été précisé précédemment, le temps de calcul nécessaire pour s'affranchir du régime transitoire d'un système dynamique peut être prohibitif. Une méthode alternative consiste, si on recherche une solution périodique, à effectuer une intégration temporelle sur une période présumée du système à partir d'un état supposé par lequel passerait celui-ci. A l'issue de cette intégration, si l'état initial et l'état final diffèrent, cela signifie que la période et/ou le point initial ne vérifient pas la condition de périodicité et il convient alors d'effectuer des corrections.

En s'appuyant sur cette idée, nous pouvons définir l'algorithme d'estimation de la solution périodique suivant. Soit un vecteur d'état  $\eta_0$  par lequel passe le système considéré à l'instant  $t = 0$ , supposé périodique de période  $T_0$ . Si l'équation du comportement dynamique du système est écrite sous forme d'état (Cf. équation 3.10), la condition de périodicité s'écrit :

$$\mathbf{Y}(T_0, \eta_0) = \eta_0 \quad (3.16)$$

Si cette condition est vérifiée en fin d'intégration temporelle alors, le système est bien périodique de période  $T_0$  et passe par l'état  $\eta_0$ . Par contre, si cette dernière n'est pas vérifiée, il va falloir faire des corrections pour annuler le résidu. Celui-ci s'écrit :

$$\mathbf{R}(T_0, \eta_0) = \mathbf{Y}(T_0, \eta_0) - \eta_0 \quad (3.17)$$

Les corrections du vecteur d'état  $\Delta\eta$  et de la période  $\Delta T$  doivent vérifier :

$$\mathbf{R}(T_0 + \Delta T, \eta_0 + \Delta\eta) = \mathbf{R}(T_0, \eta_0) + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \eta}(T_0, \eta_0) \Delta\eta + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial T}(T_0, \eta_0) \Delta T = \mathbf{0} \quad (3.18)$$

Par définition du résidu, donnée par l'équation 3.17, on peut écrire :

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \eta}(T_0, \eta_0) = \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \eta}(T_0, \eta_0) - \mathbf{I} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial T}(T_0, \eta_0) = \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial T}(T_0, \eta_0) = \tilde{\mathbf{F}}(T_0, \eta_0) \quad (3.19)$$

où  $\tilde{\mathbf{F}}$  est déduit de l'équation d'état du système 3.10 notée encore  $\dot{\mathbf{Y}}(t, \eta) = \tilde{\mathbf{F}}(t, \eta)$ . De plus, en supposant  $\mathbf{Y} \in C^2$  en  $(T_0, \eta_0)$ , on peut écrire :

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \eta}(T_0, \eta_0) = \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial t}(T_0, \eta_0) = \frac{\partial \tilde{\mathbf{F}}}{\partial \eta}(T_0, \eta_0) = \frac{\partial \tilde{\mathbf{F}}}{\partial \mathbf{Y}} \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \eta}(T_0, \eta_0) \quad (3.20)$$

Ainsi, en notant  $\mathbf{\Gamma}(t, \eta) = \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \eta}(t, \eta)$ , le terme  $\frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \eta}(T_0, \eta_0)$  de l'équation 3.19 peut être obtenu par intégration temporelle puisqu'il vérifie l'équation différentielle temporelle du premier ordre :

$$\dot{\mathbf{\Gamma}}(t, \eta) = \frac{\partial \tilde{\mathbf{F}}}{\partial \mathbf{Y}}(t, \eta) \mathbf{\Gamma}(t, \eta) \quad (3.21)$$

Compte tenu de l'équation 3.10, on déduit l'expression de  $\frac{\partial \tilde{\mathbf{F}}}{\partial \mathbf{Y}}$  :

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{F}}}{\partial \mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{K}} & -\mathbf{M}^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{C}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{\mathbf{F}}}{\partial \mathbf{q}} & \frac{\partial \hat{\mathbf{F}}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

où

$$\hat{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{F} \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

L'équation 3.18 peut désormais être écrite sous la forme suivante :

$$\mathbf{Y}(T_0, \eta_0) - \eta_0 + [\mathbf{\Gamma}(T_0, \eta_0) - \mathbf{I}] \Delta \eta + \tilde{\mathbf{F}}(T_0, \eta_0) \Delta T = \mathbf{0} \quad (3.24)$$

Nous disposons donc d'un système de  $2N$  équations ( $N$  étant le nombre de degrés de liberté du système) alors que nous avons  $2N + 1$  inconnues ( $2N$  avec  $\Delta \eta$  et une avec  $\Delta T$ ). Ceci implique que la phase de la solution recherchée est libre de se décaler. Pour palier ce problème, on peut envisager de fixer une des coordonnées de la correction, ce qui revient à supprimer une des inconnues ou bien, de rajouter une équation. On peut par exemple imposer l'orthogonalité entre  $\Delta \eta$  et  $\tilde{\mathbf{F}}(T_0, \eta_0)$  c'est-à-dire  $\tilde{\mathbf{F}}^T(T_0, \eta_0) \cdot \Delta \eta = 0$ . Dans ce cas, les corrections sont obtenues par l'équation suivante :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{\Gamma}(T_0, \eta_0) - \mathbf{I} & \tilde{\mathbf{F}}(T_0, \eta_0) \\ \tilde{\mathbf{F}}^T(T_0, \eta_0) & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \eta \\ \Delta T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_0 - \mathbf{Y}(T_0, \eta_0) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Grâce à ces corrections, un nouveau point initial est défini :

$$\begin{cases} \eta_0 = \eta_0 + \Delta \eta \\ T_0 = T_0 + \Delta T \end{cases} \quad (3.26)$$

L'intégration temporelle est alors recommencée à partir de ce point et ainsi de suite, jusqu'à ce que le résidu soit aussi proche de zéro que l'on souhaite.

Cette méthode de shooting [56, 74, 89] (également appelée méthode de tirs) est très séduisante car elle permet en théorie de déterminer des solutions périodiques de période a priori inconnue. Il faut bien entendu pour cela se placer en un point  $(T_0, \eta_0)$  relativement peu éloigné de la solution. Cependant, elle peut être coûteuse en temps de calcul puisqu'elle effectue un certain nombre d'intégrations temporelles sur toute une période du système et nécessite le calcul des gradients des forces par rapport aux degrés de liberté. De plus, elle peut également nécessiter une allocation mémoire importante en raison des matrices à stocker qui peuvent être importantes. Enfin, il faut souligner que cette méthode a l'énorme avantage de ne pas tronquer la forme de la solution recherchée comme il est d'usage dans les méthodes fréquentielles (Cf. paragraphe suivant).



### 3.2 Méthodes fréquentielles

Dans le paragraphe précédent, nous avons vu une méthode temporelle permettant de chercher des solutions périodiques tout en s'affranchissant du régime transitoire du système. Cependant, une méthode plus intuitive et plus rapide de recherche de solutions périodiques consiste à se placer dans l'espace de Fourier c'est-à-dire dans l'espace fréquentiel, d'où le titre du présent paragraphe.

En effet, une solution supposée périodique de période  $T$  peut être décomposée dans la base infinie mais dénombrable des fonctions trigonométriques. D'un point de vue numérique, puisqu'il n'est pas possible de traiter des sommes infinies, il est nécessaire de tronquer la décomposition de la solution. Cependant, il n'existe pas de critère systématique permettant de connaître a priori l'ordre de la troncature suffisant pour approcher correctement la solution c'est-à-dire quels harmoniques sont prépondérants. Bien sûr, la troncature approchera d'autant mieux la solution exacte que l'ordre de troncature sera élevé. Considérons, arbitrairement, une troncature à l'ordre  $M$  de la solution recherchée. Celle-ci peut donc s'écrire, en supposant qu'elle approche correctement la solution du problème :

$$\mathbf{q}^{exacte}(t) \approx \mathbf{q}^{appro}(t) = \mathbf{a}_0 + \sum_{m=1}^M (\mathbf{a}_m \cdot \cos(m\omega t) + \mathbf{b}_m \cdot \sin(m\omega t)) \quad (3.27)$$

En injectant  $\mathbf{q}^{appro}$  dans l'équation du comportement dynamique du système mécanique 3.1, en dissociant cette fois les forces non linéaires  $\mathbf{F}_{NL}$  des autres forces  $\mathbf{F}$ , il vient :

$$\epsilon_M(t, \mathbf{X}) = \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}^{appro}(t) + \tilde{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{q}}^{appro}(t) + \tilde{\mathbf{K}}\mathbf{q}^{appro}(t) + \mathbf{F}_{NL}(t, \mathbf{q}^{appro}, \dot{\mathbf{q}}^{appro}) - \mathbf{F}(t) \approx \mathbf{0} \quad (3.28)$$

avec

$$\mathbf{X} = \left[ \mathbf{a}_0^T, \mathbf{a}_1^T, \mathbf{b}_1^T, \dots, \mathbf{a}_M^T, \mathbf{b}_M^T \right]^T \quad (3.29)$$

Ce résidu, représentant l'écart entre la solution approchée et la solution exacte, sera d'autant plus petit que l'ordre de la troncature sera élevé.

Un des intérêts de l'espace de Fourier est de pouvoir exprimer facilement les vitesses et les accélérations du système en fonction des mêmes variables que les déplacements. Ainsi, en injectant l'expression de  $\mathbf{q}^{appro}$  (Cf. équation 3.27) dans le résidu, exprimé par l'équation 3.28, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \epsilon_M(t, \mathbf{X}) = & \tilde{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{a}_0 + \sum_{m=1}^M \left\{ \left( (\tilde{\mathbf{K}} - (m\omega)^2 \mathbf{M}) \cdot \mathbf{a}_m + (m\omega \tilde{\mathbf{C}}) \cdot \mathbf{b}_m \right) \cdot \cos(m\omega t) \right. \\ & \left. + \left( (\tilde{\mathbf{K}} - (m\omega)^2 \mathbf{M}) \cdot \mathbf{b}_m - (m\omega \tilde{\mathbf{C}}) \cdot \mathbf{a}_m \right) \cdot \sin(m\omega t) \right\} + \mathbf{F}_{NL}(t, \mathbf{q}^{appro}(t, \mathbf{X}), \dot{\mathbf{q}}^{appro}(t, \mathbf{X})) - \mathbf{F}(t) \end{aligned} \quad (3.30)$$

Dans ce qui suit, deux méthodes fréquentielles couramment utilisées vont être présentées. Elles permettent toutes deux de s'affranchir de la dépendance temporelle. Le système d'équations

3.30 se résume alors à un système d'équations algébriques dont les seules inconnues sont les coefficients de Fourier.

### 3.2.1 Méthode de la balance harmonique

La méthode de balance harmonique consiste à supprimer la dépendance temporelle du système 3.30 en le projetant sur les fonctions de la base de Fourier. Cette procédure est communément dénommée procédure de Galerkin. On recherche ainsi  $\mathbf{X}$  qui annule l'équation 3.30 en moyenne temporelle pondérée, les fonctions de pondération étant les fonctions trigonométriques  $\cos(k\omega t)$  ( $k = 0, \dots, M$ ) et  $\sin(k\omega t)$  ( $k = 1, \dots, M$ ) :

$$\begin{cases} \frac{1}{T} \int_0^T \epsilon_M(t, \mathbf{X}) dt \\ \frac{2}{T} \int_0^T \epsilon_M(t, \mathbf{X}) \cos(k\omega t) dt \text{ avec } k = 1, \dots, M \\ \frac{2}{T} \int_0^T \epsilon_M(t, \mathbf{X}) \sin(k\omega t) dt \text{ avec } k = 1, \dots, M \end{cases} \quad (3.31)$$

Le système 3.30 se réduit donc au nouveau système de  $(2M + 1)N$  inconnues et  $(2M + 1)N$  équations suivantes :

$$\mathbf{H}(\mathbf{X}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{b}(\mathbf{X}) = \mathbf{0} \quad (3.32)$$

avec

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{K}} & & & & \\ & \Lambda_1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \Lambda_k & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \Lambda_M \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

$$\mathbf{b}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{T} \int_0^T [\mathbf{F}_{NL}(t, \mathbf{q}^{appro}(t, \mathbf{X}), \dot{\mathbf{q}}^{appro}(t, \mathbf{X})) - \mathbf{F}(t)] dt \\ \Theta_1 \\ \vdots \\ \Theta_k \\ \vdots \\ \Theta_M \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

où

$$\Lambda_k = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{K}} - (k\omega)^2 \mathbf{M} & (k\omega) \tilde{\mathbf{C}} \\ -(k\omega) \tilde{\mathbf{C}} & \tilde{\mathbf{K}} - (k\omega)^2 \mathbf{M} \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

$$\Theta_k = \begin{bmatrix} \frac{2}{T} \int_0^T [\mathbf{F}_{NL}(t, \mathbf{q}^{appro}(t, \mathbf{X}), \dot{\mathbf{q}}^{appro}(t, \mathbf{X})) - \mathbf{F}(t)] \cos(k\omega t) dt \\ \frac{2}{T} \int_0^T [\mathbf{F}_{NL}(t, \mathbf{q}^{appro}(t, \mathbf{X}), \dot{\mathbf{q}}^{appro}(t, \mathbf{X})) - \mathbf{F}(t)] \sin(k\omega t) dt \end{bmatrix}$$

Le calcul de  $\mathbf{b}$  peut se faire soit analytiquement, soit numériquement. En effet, il est fondamental de remarquer que les intégrales constituant ce vecteur correspondent exactement aux coefficients de Fourier des forces non linéaires et des forces linéaires extérieures (Cf. équation 3.36). Le calcul littéral de la partie linéaire de  $\mathbf{b}$  relative à  $\mathbf{F}$  est une approche classique car,

les forces extérieures étant généralement décomposées en harmoniques, le calcul est immédiat. Concernant la partie non linéaire de  $\mathbf{b}$ , on peut tout d'abord préciser qu'il est licite de la supposer  $T$ -périodique puisque  $\mathbf{q}$  est supposée  $T$ -périodique donc  $\dot{\mathbf{q}}$  et  $\ddot{\mathbf{q}}$  aussi, de même que  $\mathbf{F}$  est également périodique d'une période généralement sous-multiple de  $T$ . Le développement analytique de ces termes est malheureusement assez limité car les calculs deviennent vite lourds et délicats pour des non linéarités complexes (jeu, frottement, etc.).

Dans ce cas, le calcul numérique s'impose. Pour cela, les termes non linéaires de  $\mathbf{b}$  c'est-à-dire les coefficients de Fourier de  $\mathbf{F}_{NL}$  peuvent être obtenus par des transformées de Fourier directes (DFT) des forces non linéaires. En effet, connaissant les coefficients de Fourier  $\mathbf{X}$  de  $\mathbf{q}$ , il est possible d'en déduire les valeurs de  $\mathbf{q}$  et  $\dot{\mathbf{q}}$  en plusieurs instants  $t_k$ , grâce à une transformée de Fourier inverse (IDFT). Les efforts non linéaires  $\mathbf{F}_{NL}(t_k, \mathbf{q}^{appro}(t_k), \dot{\mathbf{q}}_k^{appro}(t_k))$  peuvent alors être estimés en ces mêmes instants puis, leurs coefficients de Fourier sont obtenus par DFT. Ce passage du domaine fréquentiel au domaine temporel puis du temporel au fréquentiel porte le nom de technique AFT (Alternating Frequency/Time) et fut développé entre autres par Cameron et Griffin [4]. Le calcul des transformées de Fourier discrètes des efforts non linéaires peut se faire soit en utilisant un algorithme FFT (Fast Fourier Transform) dans le cas où on considère un nombre de points d'échantillonnage multiple de 2, soit en utilisant un algorithme classique de DFT dont un exemple complet est donné par Narayanan et Sekar [67]. Une méthode alternative pour calculer les coefficients de Fourier des termes non linéaires consiste tout simplement à les calculer numériquement d'après leurs définitions :

$$\begin{cases} \mathbf{a}_0(\mathbf{f}) = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{f}(t) dt \\ \mathbf{a}_k(\mathbf{f}) = \frac{2}{T} \int_0^T \mathbf{f}(t) \cos(k\omega t) dt \\ \mathbf{b}_k(\mathbf{f}) = \frac{2}{T} \int_0^T \mathbf{f}(t) \sin(k\omega t) dt \end{cases} \quad (3.36)$$

Une fois  $\mathbf{b}$  identifié, le système 3.32 peut être résolu par un solveur non linéaire de type quasi-Newton [91]. Une façon alternative consiste à utiliser un algorithme de Newton-Raphson. Cette procédure est alors dénommée méthode de la balance harmonique incrémentale.

En effet, cette procédure dénommée procédure de Newton-Raphson nécessite l'écriture du système 3.32 sous forme incrémentale. C'est-à-dire que l'on considère des coefficients de Fourier a priori  $\mathbf{X}$  et des corrections  $\Delta\mathbf{X}$ . La forme incrémentale de l'équation 3.32 s'écrit :

$$(\mathbf{A} + \mathbf{J}_b(\mathbf{X})) \cdot \Delta\mathbf{X} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{b}(\mathbf{X}) = \mathbf{0} \quad (3.37)$$

où  $\mathbf{J}_b(\mathbf{X})$  est la matrice jacobienne de  $\mathbf{b}$  et a pour expression :

$$\mathbf{J}_b(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_b^{(0,0)} & \dots & \mathbf{J}_b^{(0,2m-1)} & \mathbf{J}_b^{(0,2m)} & \dots & \mathbf{J}_b^{(0,2M-1)} & \mathbf{J}_b^{(0,2M)} \\ \vdots & & & & & & \\ \mathbf{J}_b^{(2k-1,0)} & & & & & & \\ \mathbf{J}_b^{(2k,0)} & & & \tilde{\mathbf{J}}_b(\mathbf{X}) & & & \\ \vdots & & & & & & \\ \mathbf{J}_b^{(2M-1,0)} & & & & & & \\ \mathbf{J}_b^{(2M,0)} & & & & & & \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

avec

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}_b^{(0,0)}(\mathbf{X}) &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial \mathbf{F}_{NL}}{\partial \mathbf{q}} dt \\
\mathbf{J}_b^{(0,2m-1)}(\mathbf{X}) &= \frac{1}{T} \int_0^T \left( \frac{\partial \mathbf{F}_{NL}}{\partial \mathbf{q}} \cos(m\omega t) - (m\omega) \frac{\partial \mathbf{F}_{NL}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \sin(m\omega t) \right) dt \\
\mathbf{J}_b^{(0,2m)}(\mathbf{X}) &= \frac{1}{T} \int_0^T \left( \frac{\partial \mathbf{F}_{NL}}{\partial \mathbf{q}} \sin(m\omega t) + (m\omega) \frac{\partial \mathbf{F}_{NL}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cos(m\omega t) \right) dt \\
\mathbf{J}_b^{(2k-1,0)}(\mathbf{X}) &= \frac{2}{T} \int_0^T \frac{\partial \mathbf{F}_{NL}}{\partial \mathbf{q}} \cos(k\omega t) dt \\
\mathbf{J}_b^{(2k,0)}(\mathbf{X}) &= \frac{2}{T} \int_0^T \frac{\partial \mathbf{F}_{NL}}{\partial \mathbf{q}} \sin(k\omega t) dt \\
\tilde{\mathbf{J}}_b^{(2k-1,2m-1)}(\mathbf{X}) &= \frac{2}{T} \int_0^T \left( \frac{\partial \mathbf{F}_{NL}}{\partial \mathbf{q}} \cos(m\omega t) - (m\omega) \frac{\partial \mathbf{F}_{NL}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \sin(m\omega t) \right) \cos(k\omega t) dt \\
\tilde{\mathbf{J}}_b^{(2k-1,2m)}(\mathbf{X}) &= \frac{2}{T} \int_0^T \left( \frac{\partial \mathbf{F}_{NL}}{\partial \mathbf{q}} \sin(m\omega t) + (m\omega) \frac{\partial \mathbf{F}_{NL}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cos(m\omega t) \right) \cos(k\omega t) dt \\
\tilde{\mathbf{J}}_b^{(2k,2m-1)}(\mathbf{X}) &= \frac{2}{T} \int_0^T \left( \frac{\partial \mathbf{F}_{NL}}{\partial \mathbf{q}} \cos(m\omega t) - (m\omega) \frac{\partial \mathbf{F}_{NL}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \sin(m\omega t) \right) \sin(k\omega t) dt \\
\tilde{\mathbf{J}}_b^{(2k,2m)}(\mathbf{X}) &= \frac{2}{T} \int_0^T \left( \frac{\partial \mathbf{F}_{NL}}{\partial \mathbf{q}} \sin(m\omega t) + (m\omega) \frac{\partial \mathbf{F}_{NL}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cos(m\omega t) \right) \sin(k\omega t) dt
\end{aligned} \tag{3.39}$$

L'implémentation de l'algorithme de la balance harmonique incrémentale [55, 76, 77, 79] est la suivante :

- |   |
|---|
| <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Initialisation de <math>\mathbf{X}</math></li> <li>2. Résolution de l'équation 3.37 <math>\Rightarrow \Delta \mathbf{X}</math></li> <li>3. <math>\mathbf{X} \leftarrow \mathbf{X} + \Delta \mathbf{X}</math></li> <li>4. Retour au point 2</li> </ol> |
|---|

On retrouve l'algorithme classique de Newton-Raphson. Après chaque itération, on obtient une approximation de la solution  $\mathbf{X}$  meilleure que la précédente à condition que l'initialisation première de la procédure ne soit pas trop éloignée de la solution. Le processus est arrêté dès qu'un critère de convergence fixé par l'utilisateur est atteint. Généralement, on utilise comme critères :

$$\|\Delta \mathbf{X}\| \leq \epsilon_1 \quad \text{et/ou} \quad \frac{\|\Delta \mathbf{X}\|}{\|\mathbf{X}\|} \leq \epsilon_2 \tag{3.40}$$

Où  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$  sont des tolérances fixées par l'utilisateur,  $\|\cdot\|$  étant, en général, la norme euclidienne.

### 3.2.2 Méthode de collocation trigonométrique

La méthode de la balance harmonique présentée précédemment n'est autre qu'une méthode de résidus pondérés. En effet, la solution exacte du système d'équations différentielles régissant le comportement dynamique du système étudié ne pouvant la plupart du temps pas être obtenue analytiquement, une approximation en est faite. Cette approximation ne vérifiant pas parfaitement l'équation différentielle du système, il en résulte un résidu que l'on tente de minimiser en le projetant sur des fonctions tests. Dans le cas de la balance harmonique, les fonctions test et les fonctions d'approximation de la solution sont identiques : ce sont des fonctions trigonométriques. Cette méthode, nommée méthode de Galerkin, est la plus célèbre des méthodes de résidus pondérés en mécanique. Cependant, il est tout à fait légitime de considérer des fonctions d'approximation et des fonctions test différentes. Ces méthodes appartiennent à la famille des méthodes de collocations. Dans le cas de recherche de solutions périodiques approchées par des séries de Fourier, on parle de collocation trigonométrique [93].

Comme précédemment, la solution recherchée est périodique de période  $T$  connue. Le principe de la collocation consiste à vérifier l'équation du mouvement du système 3.1 en un nombre  $L$  d'instants  $t_k$  dans  $[0, T]$ . Les instants  $t_k$  sont généralement pris équidistants c'est-à-dire  $t_k = kT/L$  ( $k \in \{0, L-1\}$ ). Le système à résoudre s'écrit donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t_0) + \tilde{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{q}}(t_0) + \tilde{\mathbf{K}}\mathbf{q}(t_0) + \mathbf{F}_{NL}(t_0, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{F}(t_0) \\ \vdots \\ \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t_k) + \tilde{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{q}}(t_k) + \tilde{\mathbf{K}}\mathbf{q}(t_k) + \mathbf{F}_{NL}(t_k, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{F}(t_k) \\ \vdots \\ \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t_{L-1}) + \tilde{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{q}}(t_{L-1}) + \tilde{\mathbf{K}}\mathbf{q}(t_{L-1}) + \mathbf{F}_{NL}(t_{L-1}, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{F}(t_{L-1}) \end{array} \right. \quad (3.41)$$

En injectant l'expression approchée sous forme de série de Fourier de  $\mathbf{q}$  (Cf. équation 3.27) dans ce système, il vient un nouveau système de  $L$  équations dont les  $2M+1$  inconnues sont les coefficients de Fourier. Dans le cas où  $L = 2M+1$ , les calculs ont été menés par Jean et Nelson [42]. On peut cependant remarquer que vérifier l'équation du mouvement en des instants ponctuels  $t_k$  revient à utiliser une méthode de résidus pondérés dont les fonctions test sont des Dirac aux instants  $t_k$  :  $\delta(t_k) : t \mapsto \delta(t - t_k)$  ( $k = 0, \dots, 2M$ ). Il suffit donc de vérifier :

$$\forall k, 0 \leq k \leq 2M, \int_0^T \epsilon(t, \mathbf{X}) \delta(t - t_k) dt = \epsilon(t_k, \mathbf{X}) = \mathbf{0} \quad (3.42)$$

Le système de  $(2M+1)N$  équations à  $(2M+1)N$  inconnues alors obtenu peut s'écrire une fois de plus :

$$\mathbf{H}(\mathbf{X}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{b}(\mathbf{X}) = \mathbf{0} \quad (3.43)$$

avec cette fois-ci :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{K}} & \tilde{\mathbf{A}} \\ | & \\ \tilde{\mathbf{K}} & \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

où, en gardant les mêmes notations que dans l'équation 3.38, les éléments de la matrice  $\tilde{\mathbf{A}}$  sont, pour  $k = 0, \dots, 2M$  et  $m = 1, \dots, 2M$  :

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{A}}^{(\mathbf{k}, 2\mathbf{m}-1)} &= \left( \tilde{\mathbf{K}} - (m\omega)^2 \mathbf{M} \right) \cos(m\omega t_k) - (m\omega) \tilde{\mathbf{C}} \sin(m\omega t_k) \\ \tilde{\mathbf{A}}^{(\mathbf{k}, 2\mathbf{m})} &= \left( \tilde{\mathbf{K}} - (m\omega)^2 \mathbf{M} \right) \sin(m\omega t_k) + (m\omega) \tilde{\mathbf{C}} \cos(m\omega t_k)\end{aligned}\quad (3.45)$$

et

$$\mathbf{b}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{NL}(t_0, \mathbf{q}(t_0, \mathbf{X}), \dot{\mathbf{q}}(t_0, \mathbf{X})) - \mathbf{F}(t_0) \\ \vdots \\ \mathbf{F}_{NL}(t_{2M}, \mathbf{q}(t_{2M}, \mathbf{X}), \dot{\mathbf{q}}(t_{2M}, \mathbf{X})) - \mathbf{F}(t_{2M}) \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

Le système 3.43 peut, comme dans le cas de la balance harmonique, être résolu par un solveur non linéaire.

Dans le cas où  $L > 2M + 1$  c'est-à-dire si le nombre d'instantes où on souhaite vérifier l'équation d'équilibre du système est supérieur au nombre d'inconnues, alors la collocation est dite sur-déterminée et le système 3.43 est un système rectangulaire. Dans ce cas, sa résolution passe par un algorithme d'optimisation. Il est possible de démontrer que la solution de ce problème minimise la fonctionnelle  $\Psi$  définie par :

$$\Psi(\mathbf{X}) = \sum_{k=1}^L \|\epsilon_{\mathbf{M}}(t_k, \mathbf{X})\|_2^2 \quad (3.47)$$

On parle alors de collocation par moindres carrés.

### 3.3 Les techniques de continuations

Les différents régimes des systèmes mécaniques sont généralement conditionnés par certains paramètres. Par exemple, dans le cas des machines tournantes, un paramètre fondamental contrôlant la réponse du système est la vitesse de rotation  $\Omega$ . Les méthodes présentées jusqu'ici sont valables pour un jeu de paramètres donné. Ainsi, pour connaître l'évolution du comportement d'un système lors d'une évolution d'un de ses paramètres, il est nécessaire d'effectuer pour chaque valeur de ce paramètre, nommé usuellement paramètre de contrôle ou paramètre de bifurcation, une des méthodes présentées précédemment.

Notons  $[\mathbf{X}]$  une grandeur représentative de l'état du système associée à un paramètre de contrôle  $\mu$ . Dans le cas des machines tournantes, la réponse à balourd est classiquement recherchée. Dans ce cas  $[\mathbf{X}]$  représente l'amplitude de la réponse du rotor et  $\mu = \Omega$ . Pour chaque vitesse de rotation  $\mu_p = \Omega_p$  se situant dans la plage de fonctionnement de la machine  $[\mu_1 = \Omega_1, \mu_2 = \Omega_2]$ , il faut donc effectuer une intégration temporelle ou une balance harmonique afin de déterminer l'amplitude de la réponse du rotor. En effet, la solution de l'équation différentielle régissant le comportement dynamique du système dépendant de ce paramètre, peut donc être noté  $\mathbf{q}(t, \mu)$  et, il en est de même pour les solutions  $\mathbf{X}(\mu)$  du système algébrique

$$\mathbf{H}(\mathbf{X}, \mu) = \mathbf{A}(\mu) \cdot \mathbf{X} + \mathbf{b}(\mathbf{X}, \mu) = \mathbf{0} \quad (3.48)$$

obtenues par l'application des méthodes précédentes.

Afin de gagner du temps, une alternative consiste à calculer l'état du système correspondant à une nouvelle valeur du paramètre en tenant compte de l'état qu'il avait à la valeur précédente du paramètre de contrôle. C'est-à-dire que l'amplitude de la réponse du rotor à  $\mu = \Omega + \Delta\Omega$  sera calculée en tenant compte de l'amplitude de sa réponse à  $\mu = \Omega$ . C'est le principe même de la continuation.

Concrètement, il s'agit d'une succession de prédictions puis de corrections de l'état du système : le prédicteur fournit une estimation  $\hat{\mathbf{X}}^{(p)}$  de la solution à  $\mu_p$  qui est ensuite améliorée par le correcteur jusqu'à l'obtention de la solution recherchée  $\mathbf{X}^{(p)} = \mathbf{X}(\mu_p)$ . En plus du gain de temps, la continuation permet de suivre les éventuels retournements du système. En effet, il est courant que les systèmes non linéaires puissent adopter plusieurs états à une valeur de paramètre  $\mu$ , ce qui se traduit par des retournements de la courbe de  $[\mathbf{X}]$  en fonction de  $\mu$ , comme l'illustre la figure 3.2. Ces particularités des systèmes non linéaires sont difficilement décelables avec des intégrations temporelles directes ou des méthodes fréquentielles classiques. Par contre, ces mêmes méthodes, couplées avec des méthodes de continuation utilisant une paramétrisation judicieuse du système, permettent de repérer des retournements.

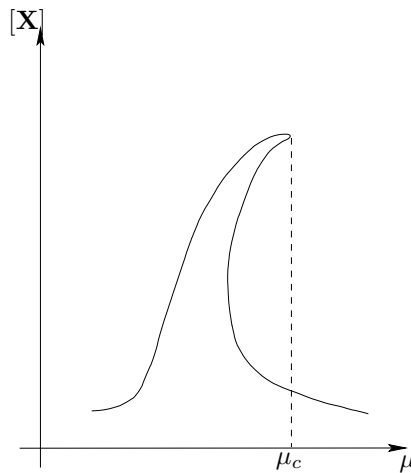


FIG. 3.2 – Exemple de retournement d'un système non linéaire

### 3.3.1 La paramétrisation

Pour faire évoluer le système, on peut imposer « à la main » un incrément de paramètre  $\Delta\mu$ . Dans ce cas, on parle de continuation séquentielle. Les retournements évoqués ne peuvent alors pas être obtenus. Une autre façon de gérer l'évolution du système consiste à substituer l'incrément de paramètre par un incrément d'abscisse curviligne qui tient compte à la fois de l'évolution de  $\mathbf{X}$  et de celle de son paramètre de contrôle. L'abscisse curviligne  $s$  de la courbe de la réponse étant elle-même indéterminée a priori, elle est approchée par la longueur de la ligne brisée définie par l'ensemble des points  $(\mathbf{X}^{(p)}, \mu^{(p)})$  qui eux mêmes dépendent de  $s$ . La

distance entre deux points successifs de la courbe est donnée par :

$$\Delta s^{(p)} = \sqrt{\|\mathbf{X}^{(p)} - \mathbf{X}^{(p-1)}\|^2 + (\mu^{(p)} - \mu^{(p-1)})^2} \quad (3.49)$$

L'abscisse curviligne se définit alors de proche en proche par :

$$s^{(p)} = s^{(p-1)} + \Delta s^{(p)} \quad (3.50)$$

avec  $s^{(1)} = 0$ .

Avec ce changement de paramétrage du système, le paramètre de contrôle va lui aussi pouvoir être corrigé. Il pourra ainsi être augmenté ou diminué, pour une valeur d'abscisse curviligne donnée, et donc les retournements pourront être suivis. Cependant, la correction se faisant à la fois en  $\mathbf{X}$  et en  $\mu$ , nous aurons  $2N + 1$  inconnues pour, en l'état actuel,  $2N$  équations. Dans ce cas, la correction consistera en une optimisation ou plus précisément en une minimisation du résidu de l'équation 3.48. Une alternative consiste à considérer une équation supplémentaire afin d'effectuer, non plus une minimisation mais, une résolution de système. Cette équation supplémentaire peut être une équation de paramétrisation.

### 3.3.1.1 La paramétrisation par longueur d'arc

Comme il a été précisé précédemment, la paramétrisation va nous permettre de considérer une équation supplémentaire pour résoudre le système 3.48 possédant  $2N + 1$  inconnues. L'équation de paramétrisation  $P$  la plus intuitive consiste à dire que le point recherché se trouve sur la courbe  $\mathbf{H}(\mathbf{X}, \mu) = \mathbf{0}$  et sur une hypersphère centrée sur le dernier point trouvé et de rayon  $\Delta s$ . Le système à résoudre est donc le suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{H}(\mathbf{X}, \mu) = \mathbf{A}(\mu) \cdot \mathbf{X} + \mathbf{b}(\mathbf{X}, \mu) = \mathbf{0} \\ P(\mathbf{X}, \mu) = \|\mathbf{X} - \mathbf{X}^{(p)}\|^2 + (\mu - \mu^{(p)})^2 - \Delta s^2 = 0 \end{cases} \quad (3.51)$$

Cette méthode de continuation peut être schématisée par la figure 3.3 et porte le nom de continuation *arc-length*. En pratique, il est possible de mettre l'accent sur  $\mathbf{X}$  ou sur  $\mu$  en pondérant les termes de l'équation de paramétrisation  $P$  par un facteur d'ajustement  $\xi$  :

$$P(\mathbf{X}, \mu) = \xi \|\mathbf{X} - \mathbf{X}^{(p)}\|^2 + (1 - \xi) (\mu - \mu^{(p)})^2 - \Delta s^2 = 0 \quad (3.52)$$

Une autre possibilité consiste à rechercher la solution à l'intersection entre la courbe solution  $\mathbf{H}(\mathbf{X}, \mu) = \mathbf{0}$  et un hyperplan orthogonal à la tangente à cette dernière courbe au dernier point obtenu  $(\mathbf{X}^{(p)}, \mu^{(p)})$  et situé à une distance  $\Delta l$  de ce dernier. La figure 3.4 illustre cette méthode qui porte le nom de *pseudo arc-length*. Il faut noter que la distance  $\Delta l$  ne correspond pas à la distance entre deux points  $(\mathbf{X}^{(p)}, \mu^{(p)})$  et  $(\mathbf{X}^{(p+1)}, \mu^{(p+1)})$  mais, à la distance entre un point  $(\mathbf{X}^{(p)}, \mu^{(p)})$  et la projection de celui recherché, sur la tangente au premier point.

L'équation de cette tangente s'obtient en écrivant que  $\frac{d\mathbf{H}}{ds} = \mathbf{0}$  soit :

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{X}} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial s} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mu} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial s} = \mathbf{0} \quad (3.53)$$



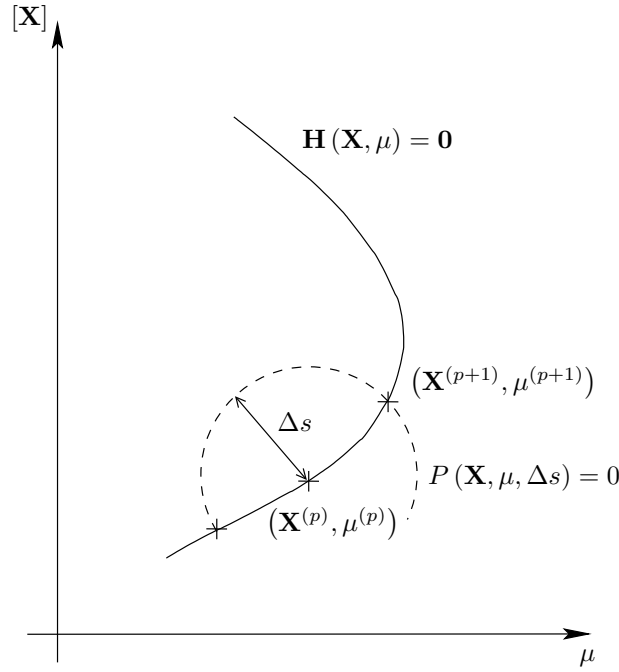


FIG. 3.3 – Méthode de continuation de type arc-length

Les composantes  $\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial s} = \dot{\mathbf{X}}^{(p)}$  et  $\frac{\partial \mu}{\partial s} = \dot{\mu}^{(p)}$  du vecteur tangent à la courbe solution au point  $(\mathbf{X}^{(p)}, \mu^{(p)})$  vérifient donc la relation :

$$\dot{\mathbf{X}}^{(p)} = - \left( \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{X}} (\mathbf{X}^{(p)}, \mu^{(p)}) \right)^{-1} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mu} (\mathbf{X}^{(p)}, \mu^{(p)}) \cdot \dot{\mu}^{(p)} \quad (3.54)$$

Une fois le vecteur directeur de cet hyperplan normalisé, on en déduit son équation et le système d'équation augmenté à résoudre s'écrit :

$$\begin{cases} \mathbf{H}(\mathbf{X}, \mu) = \mathbf{A}(\mu) \cdot \mathbf{X} + \mathbf{b}(\mathbf{X}, \mu) = \mathbf{0} \\ P(\mathbf{X}, \mu) = {}^t \dot{\mathbf{X}}^{(p)} \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{X}^{(p)}) + \dot{\mu}^{(p)} (\mu - \mu^{(p)}) - \Delta l = 0 \end{cases} \quad (3.55)$$

Il se peut, contrairement à la continuation de type arc-length où il existe toujours une intersection entre l'hypersphère et la courbe solution, que l'hyperplan considéré dans la continuation de type pseudo arc-length ne coupe jamais la courbe solution. Ceci peut se comprendre aisément en regardant la figure 3.4 et en considérant un  $\Delta l$  plus grand. Afin d'éviter ce cas de figure, il convient de prendre des  $\Delta l$  assez faibles.

L'avantage de la continuation arc-length réside dans sa simplicité de mise en œuvre. Par contre, l'équation de paramétrisation est non linéaire contrairement à la continuation de type pseudo arc-length. Cependant, cette méthode de continuation nécessite le calcul de la jacobienne de  $\mathbf{H}$  par rapport à  $\mathbf{X}$  et  $\mu$ .

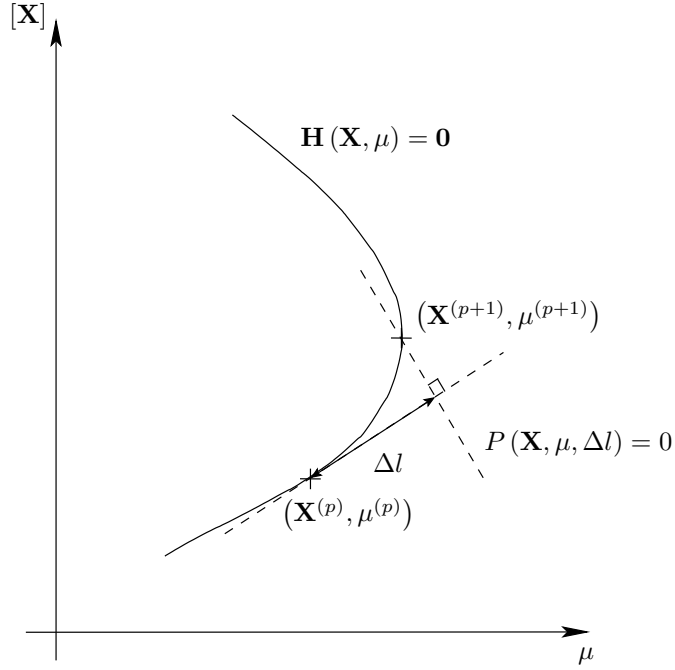


FIG. 3.4 – Méthode de continuation de type pseudo arc-length

### 3.3.1.2 La paramétrisation sélective

Pour terminer, on peut citer la méthode de paramétrisation sélective. Celle-ci consiste à fixer une des inconnues c'est-à-dire soit une composante de  $\mathbf{X}$ , soit  $\mu$ . Le système à résoudre s'écrit alors :

$$\begin{cases} \mathbf{H}(\mathbf{X}, \mu) = \mathbf{A}(\mu) \cdot \mathbf{X} + \mathbf{b}(\mathbf{X}, \mu) = \mathbf{0} \\ P(\mathbf{X}, \mu) = X_k - \eta = 0 \end{cases} \quad (3.56)$$

avec  $k \in \{1, \dots, N+1\}$  en posant  $X_{N+1} = \mu$ . Les paramètres  $k$  et  $\eta$  varient au cours de la procédure. Il est courant de fixer la variable qui a subi la plus grande variation relative entre deux calculs.  $X_k$  est donc choisit tel que :

$$\Delta X_k = \max \{ \Delta X_1, \dots, \Delta X_{N+1} \} \quad \text{avec} \quad \Delta X_i = \frac{|X_i^{(p)} - X_i^{(p-1)}|}{|X_i^{(p)}|} \quad (3.57)$$

Concernant le choix de  $\eta$ , il dépend de  $X_k$  et de la valeur d'incrément entre deux points successifs. Un choix classique consiste à prendre  $\eta$  tel que :

$$\eta = X_k^{(p)} + \xi \left( X_k^{(p)} - X_k^{(p-1)} \right) \quad (3.58)$$

où  $\xi$  est un facteur d'ajustement entre l'ancien incrément  $X_k^{(p)} - X_k^{(p-1)}$  et le nouveau  $\eta - X_k^{(p)}$ . Cette méthode de continuation est schématisée en figure 3.5(a).

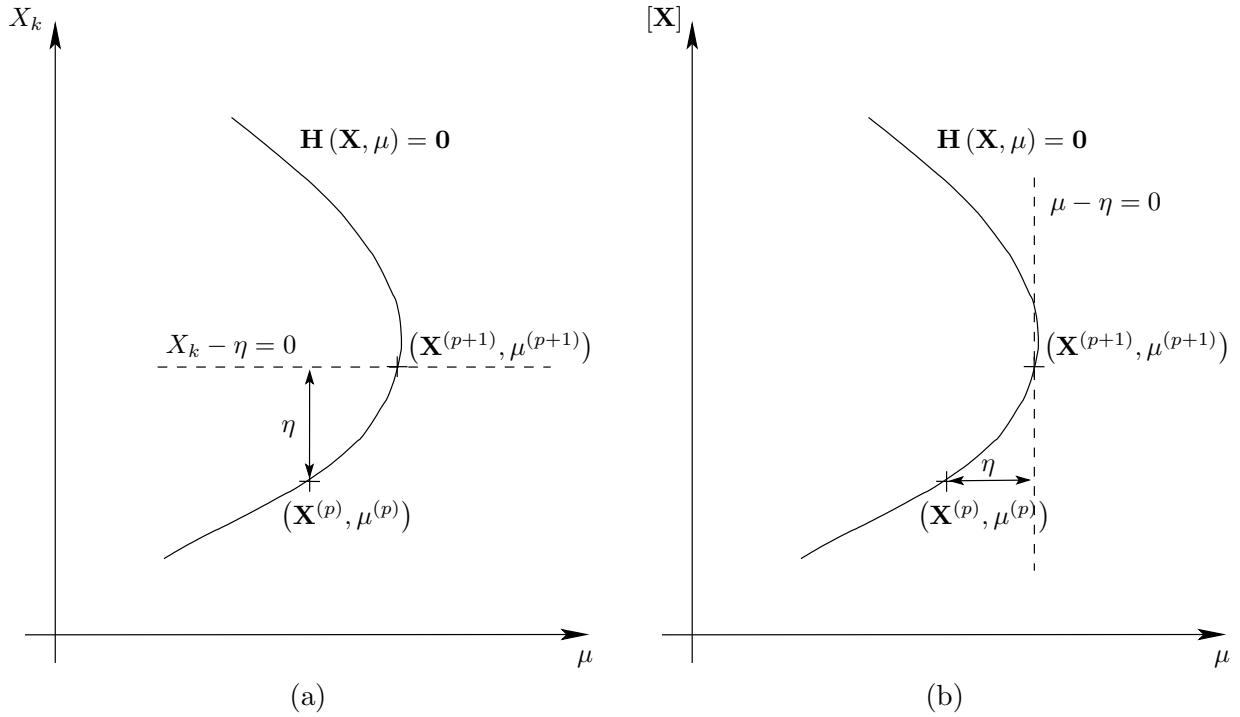


FIG. 3.5 – Méthode de continuation avec paramétrisation sélective

Il est possible de pondérer la variation  $X_{N+1}$  par une constante supérieure à 1 afin de favoriser le choix de  $\mu$  comme paramètre à fixer. Changer de paramétrisation c'est-à-dire paramétrer  $\mu$  ou  $X_k$ , n'a d'influence et d'intérêt qu'au point de retournement. En effet, c'est au voisinage de ce point que le paramètre de contrôle varie le moins et donc il est plus judicieux de paramétrer une autre inconnue. On peut remarquer que lorsque la variable paramétrée est le paramètre de contrôle  $\mu$  (Cf. figure 3.5(b)), on se retrouve dans le cas d'une continuation séquentielle où le choix de  $\eta$  est trivialement la valeur de  $\Delta\mu$ .

Il est également possible de changer le critère de sélection. Ainsi, Li et Xu [56] ont couplé une méthode de shooting avec une paramétrisation sélective dans laquelle la variable fixée était celle correspondant au résidu le plus faible.

### 3.3.2 Les prédicteurs

Dans une méthode de continuation, un prédicteur a pour but d'améliorer la convergence de la résolution du système 3.48. Pour cela, il doit fournir une estimation du point  $(\mathbf{X}^{(p+1)}, \mu^{(p+1)})$  notée  $(\hat{\mathbf{X}}^{(p+1)}, \hat{\mu}^{(p+1)})$  à partir des points précédemment obtenus  $(\mathbf{X}^{(p-i)}, \mu^{(p-i)})$  avec  $i \geq 0$ . Cette estimation est alors prise comme point initial dans le processus de résolution du système non linéaire 3.48.

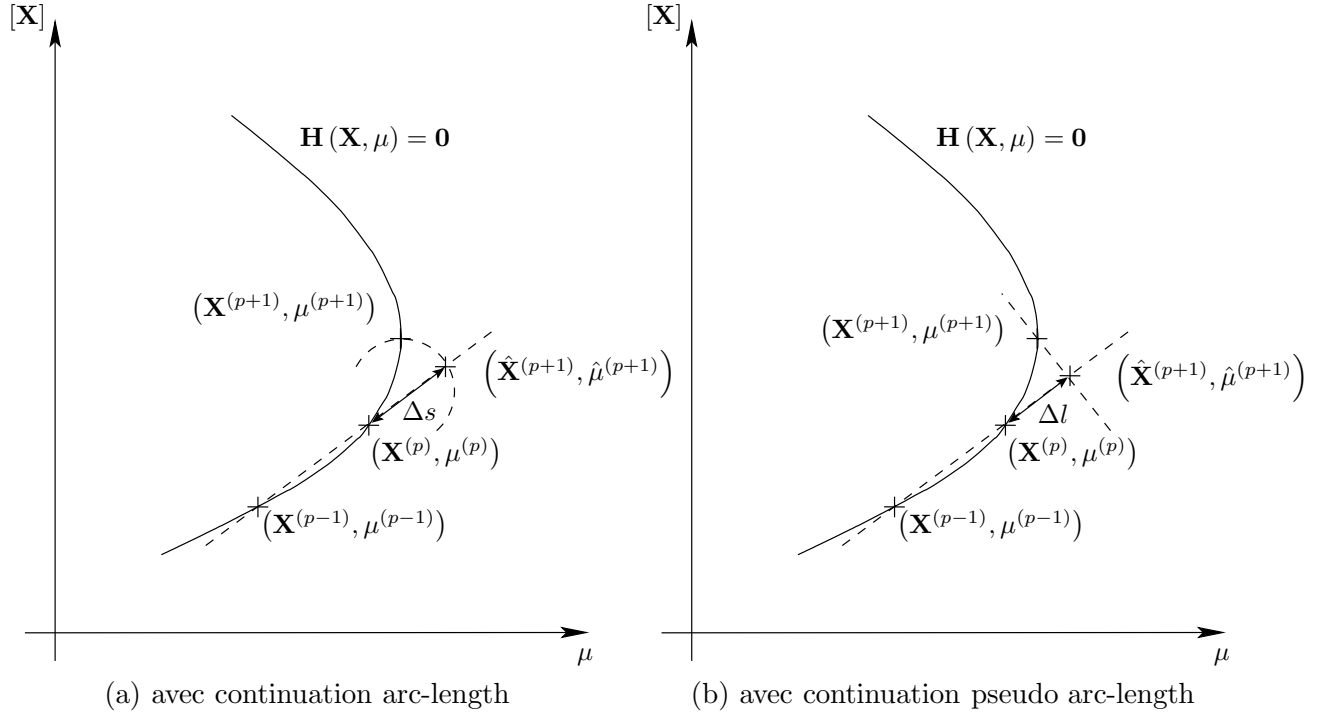


FIG. 3.6 – Prédicteur de type sécante

### 3.3.2.1 La prédiction sécante

La prédiction la plus simple consiste à se servir de la sécante aux deux points solutions précédents comme illustré en figure 3.6. Ce prédicteur s'adapte au cas d'une continuation de type arc-length ou de type pseudo arc-length. La prédiction du point  $(\hat{\mathbf{X}}^{(p+1)}, \hat{\mu}^{(p+1)})$  se trouvant à une distance  $\Delta h = \Delta s$  ou  $\Delta l$  du point  $(\mathbf{X}^{(p)}, \mu^{(p)})$  s'exprime [48] par :

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{X}}^{(p+1)} = \mathbf{X}^{(p)} + \Delta h \frac{\mathbf{X}^{(p)} - \mathbf{X}^{(p-1)}}{\sqrt{\|\mathbf{X}^{(p)} - \mathbf{X}^{(p-1)}\|^2 + (\mu^{(p)} - \mu^{(p-1)})^2}} \\ \hat{\mu}^{(p+1)} = \mu^{(p)} + \Delta h \frac{\mu^{(p)} - \mu^{(p-1)}}{\sqrt{\|\mathbf{X}^{(p)} - \mathbf{X}^{(p-1)}\|^2 + (\mu^{(p)} - \mu^{(p-1)})^2}} \end{cases} \quad (3.59)$$

### 3.3.2.2 La prédiction tangente

Une autre façon de prédire le point  $(\hat{\mathbf{X}}^{(p+1)}, \hat{\mu}^{(p+1)})$  est de le considérer sur la tangente à la courbe solution au point  $(\mathbf{X}^{(p)}, \mu^{(p)})$  et à une distance  $\Delta h$  de ce dernier. L'équation de cette tangente a déjà été précisée (Cf. équation 3.53), de même que la relation entre ses composantes  $\Delta \mathbf{X}^{(p)}$  et  $\Delta \mu^{(p)}$  en découlant (Cf. équation 3.54). Par définition [1], la tangente induite par une matrice  $\mathbf{J}$  est l'unique vecteur  $\mathbf{t}$  tel que :

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{t} = 0 \quad (3.60)$$

$$\|\mathbf{t}\| = 1 \quad (3.61)$$

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{J} \\ \mathbf{t}^T \end{pmatrix} > 0 \quad (3.62)$$

La première relation 3.60 n'est autre que l'équation de la tangente 3.53 avec :

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{X}}(\mathbf{X}^{(p)}, \mu^{(p)}) & \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mu}(\mathbf{X}^{(p)}, \mu^{(p)}) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{t} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{X}^{(p)} & \Delta \mu^{(p)} \end{bmatrix}^T \quad (3.63)$$

Si l'estimation du point  $(\mathbf{X}^{(p+1)}, \mu^{(p+1)})$  est faite à une distance  $\Delta h$  du point précédent, compte tenu de la relation 3.54 entre les composantes du vecteur tangent, il vient, après normalisation du vecteur  $\mathbf{t}$  (Cf. équation 3.61), les expressions des incréments suivantes :

$$\begin{cases} \Delta \mu^{(p)} = \pm \frac{\Delta h}{\sqrt{\left\| \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{X}}^{-1}(\mathbf{X}^{(p)}, \mu^{(p)}) \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mu}(\mathbf{X}^{(p)}, \mu^{(p)}) \right\|^2 + 1}} \\ \Delta \mathbf{X}^{(p)} = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{X}}^{-1}(\mathbf{X}^{(p)}, \mu^{(p)}) \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mu}(\mathbf{X}^{(p)}, \mu^{(p)}) \Delta \mu^{(p)} \end{cases} \quad (3.64)$$

L'indécision du signe de  $\Delta \mu^{(p)}$  reflète la possibilité d'orienter la tangente dans un sens ou dans l'autre du parcours de la courbe solution. Afin de parcourir celle-ci toujours dans le même sens et ainsi éviter de revenir sur des points déjà trouvés, la condition 3.62 doit être vérifiée. Ainsi, on suppose  $\Delta \mu > 0$  et on doit avoir :

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{X}}(\mathbf{X}^{(p)}, \mu^{(p)}) & \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mu}(\mathbf{X}^{(p)}, \mu^{(p)}) \\ -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{X}}^{-1}(\mathbf{X}^{(p)}, \mu^{(p)}) \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mu}(\mathbf{X}^{(p)}, \mu^{(p)}) & 1 \end{pmatrix} \Delta \mu > 0 \quad (3.65)$$

Si ce n'est pas le cas, on prend l'opposé de  $\Delta \mu$ . Les prédictions s'expriment alors par :

$$\begin{cases} \hat{\mu}^{(p+1)} = \mu^{(p)} + \Delta \mu^{(p)} \\ \hat{\mathbf{X}}^{(p+1)} = \mathbf{X}^{(p)} + \Delta \mathbf{X}^{(p)} \end{cases} \quad (3.66)$$

Cette méthode de prédiction s'adapte également aux continuations de type arc-length ( $\Delta h = \Delta s$ ) et pseudo arc-length ( $\Delta h = \Delta l$ ) comme le montre la figure 3.7. On peut remarquer, à titre indicatif, que dans le cas d'une continuation séquentielle, où l'incrément de paramètre  $\Delta \mu$  est fixé par l'utilisateur, les prédictions s'expriment par :

$$\begin{cases} \hat{\mu}^{(p+1)} = \mu^{(p)} + \Delta \mu \\ \hat{\mathbf{X}}^{(p+1)} = \mathbf{X}^{(p)} - \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{X}}^{-1}(\mathbf{X}^{(p)}, \mu^{(p)}) \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mu}(\mathbf{X}^{(p)}, \mu^{(p)}) \Delta \mu \end{cases} \quad (3.67)$$

Un inconvénient de cette méthode de prédiction est de ne pas pouvoir être utilisée telle quelle au voisinage d'un point de retournement. En effet, au point de retournement, la jacobienne  $\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{X}}$  est singulière c'est-à-dire de rang  $N - 1$ . Il n'est donc pas possible de l'inverser et donc de déterminer les incréments par l'équation 3.64. Bien qu'il y ait peu de chances d'effectuer une prédiction au point précis du retournement de la courbe, il faut noter qu'au voisinage de celui-ci, la jacobienne a de très fortes chances d'être mal conditionnée et donc d'entraîner les problèmes numériques rendant difficile la détermination des incréments. Une alternative consiste à augmenter l'équation 3.60 en imposant une relation de normalisation  $\mathbf{c}^T \cdot \mathbf{t} = 1$  entre

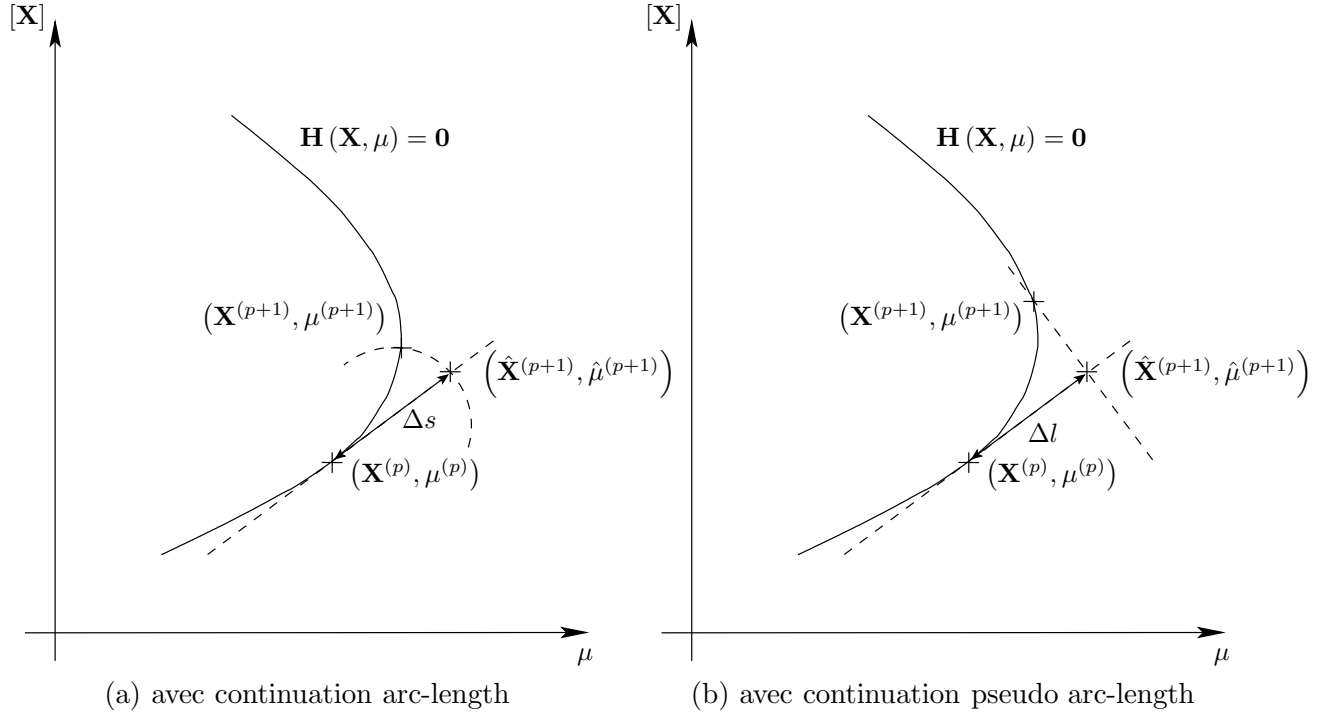


FIG. 3.7 – Prédicteur de type tangente

les incréments. La relation 3.60 devient alors, en utilisant les notations définies par l'équation 3.63 :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J} \\ \mathbf{c}^T \end{bmatrix} \cdot \mathbf{t} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{e}_{N+1} \quad (3.68)$$

Si le vecteur  $\mathbf{c}$  est convenablement choisi, il est possible de rendre la matrice augmentée de rang  $N + 1$  puisqu'au point de retournement, la matrice  $\mathbf{J}$  n'est plus de rang  $N + 1$  mais  $N$ . Dans ce cas, cette matrice augmentée est inversible et les incréments peuvent alors être déterminés. Par exemple, si on choisit  $\mathbf{c} = c \mathbf{e}_k$ , ( $k \in \{1, \dots, N\}$ ) alors,  $\Delta X_k = 1/c$ . Ceci revient à effectuer une paramétrisation sélective où les coefficients  $\eta$  et  $c$  doivent vérifier  $\eta - X_k = 1/c$ .

### 3.3.2.3 La prédiction d'ordre supérieur

La prédiction par sécante revient à une interpolation polynomiale d'ordre 1 en  $s$ . La prédiction par tangente, quant à elle, est issue d'un développement limité au premier ordre de la courbe solution. On parle ainsi de prédicteur d'ordre 1. Si nous considérons plus de points antérieurs que dans les méthodes précédentes pour estimer le point  $(\mathbf{X}^{(p+1)}, \mu^{(p+1)})$ , nous avons recours à des interpolations polynomiales. Contrairement aux méthodes précédentes, celles-ci ne requièrent pas le calcul de la jacobienne de  $\mathbf{H}$  par rapport à  $\mathbf{X}$  et  $\mu$  mais, nécessitent le stockage des  $d + 1$  points antérieurs au point recherché, dans le cas d'une interpolation polynomiale d'ordre  $d$ .

Le principe consiste à déterminer les coefficients d'un polynôme d'ordre  $d$  passant par les  $d + 1$  points antérieurs au point  $(\mathbf{X}^{(p+1)}, \mu^{(p+1)})$ . L'interpolation est réalisée sur les  $\mu_i$  dans le cas d'une continuation séquentielle ou sinon, sur les  $s^{(i)}$ , avec  $i \in \{p - d, \dots, d\}$ . Le point prédit  $(\hat{\mathbf{X}}^{(p+1)}, \hat{\mu}^{(p+1)})$  sera l'extrapolation suivant le polynôme considéré, se situant à l'abscisse  $\mu_{p+1}$  ou  $s^{(p+1)}$ . Dans le cas des polynômes de Lagrange, en considérant une paramétrisation par longueur d'arc, les prédictions s'expriment par [83] :

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{X}}^{(p+1)} = \sum_{i=0}^d L_i \mathbf{X}^{(p-d+i)} \\ \hat{\mu}^{(p+1)} = \sum_{i=0}^d L_i \mu^{(p-d+i)} \end{cases} \quad \text{avec} \quad L_i = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^d \frac{s^{(p+1)} - s^{(p-d+j)}}{s^{(p-d+i)} - s^{(p-d+j)}} \quad (3.69)$$

Il faut noter que plus l'ordre du polynôme considéré est élevé, plus il y a des chances que l'estimation soit mauvaise. En effet, plus le polynôme aura un ordre élevé, plus il faudra considérer de points sur la courbe solution. Ceux-ci seront alors repartis sur une longueur de courbe importante qui ne pourra peut être plus être approchée convenablement par un polynôme. De plus, même si la courbe est assez régulière, il est connu [27] que l'approximation d'une fonction par un polynôme interpolateur en des points d'abscisses équidistantes se détériore au voisinage des points d'abscisses maximale et minimale lorsque le nombre de points d'interpolation augmente. Il est ainsi courant et judicieux de se limiter à une interpolation cubique.

### 3.3.3 Les correcteurs

Il est clair, au vu des illustrations précédentes, que les prédictions diffèrent plus ou moins des points solutions. Les correcteurs sont donc des algorithmes ou des procédures visant à obtenir un point vérifiant l'équation 3.48 à partir de sa prédiction.

D'une façon générale, comme nous l'avons précisé au début de ce chapitre, nous avons  $N + 1$  inconnues et  $N$  équations. Ainsi, à partir de la prédiction  $(\hat{\mathbf{X}}^{(p+1)}, \hat{\mu}^{(p+1)})$ , seule une minimisation du système 3.48 peut être faite afin de se rapprocher le plus possible du point solution  $(\mathbf{X}^{(p+1)}, \mu^{(p+1)})$ . Pour cela, un algorithme de minimisation classique disponible dans les bibliothèques Fortran ou Matlab peut être employé. On peut également employer un correcteur de minimisation par moindres carrés.

#### 3.3.3.1 Le correcteur de minimisation par moindres carrés

Une méthode de Newton-Raphson classique pour résoudre le système non linéaire 3.48 se résume en une succession de résolution de systèmes linéaires :

$$\left[ \begin{array}{cc} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{X}} \left( {}^{(i)}\mathbf{X}, {}^{(i)}\mu \right) & \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mu} \left( {}^{(i)}\mathbf{X}, {}^{(i)}\mu \right) \end{array} \right] \cdot \begin{pmatrix} {}^{(i)}\Delta \mathbf{X} \\ {}^{(i)}\Delta \mu \end{pmatrix} = -\mathbf{H} \left( {}^{(i)}\mathbf{X}, {}^{(i)}\mu \right) \quad (3.70)$$

où l'exposant  $(i)$  correspond au numéro d'itération, à ne pas confondre avec l'exposant  $(p)$  placé à droite représentant la numérotation des points solutions.

Le vecteur des incréments de corrections étant multiplié par une matrice non carrée, de dimensions  $N \times (N + 1)$ , il ne peut pas s'obtenir par inversion de celle-ci. Une alternative consiste à utiliser la pseudo inverse de cette matrice encore appelée inverse de Moore-Penrose. Son calcul s'effectue suivant une décomposition par valeurs singulières, SVD. Le principe de la SVD consiste à décomposer une matrice rectangulaire de dimensions  $N \times (N + 1)$  en un produit matriciel  $\mathbf{U} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{V}^T$  où  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{V}$  sont des matrices orthonormales de dimensions respectives  $N \times N$  et  $(N + 1) \times (N + 1)$  et  $\mathbf{S}$ , une matrice rectangulaire de dimensions  $N \times (N + 1)$  diagonale ne possédant que des termes non négatifs. La solution est alors :

$$\begin{bmatrix} {}^{(i)}\Delta \mathbf{X} \\ {}^{(i)}\Delta \mu \end{bmatrix} = -\mathbf{V} \cdot \mathbf{S}^{-1} \cdot \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{H} \left( {}^{(i)}\mathbf{X}, {}^{(i)}\mu \right) \quad (3.71)$$

où  $\mathbf{S}^{-1}$  est l'inverse de  $\mathbf{S}$  calculée en ignorant sa dernière colonne (nulle), complétée par une ligne de zéros. A la fin des itérations, on obtient la solution pour laquelle le critère  $\|\mathbf{X} - \mathbf{X}^{(p+1)}\|_2^2 + (\mu - \hat{\mu}^{(p+1)})^2$  est minimum, c'est-à-dire le point, sur la courbe solution, le plus proche au sens des moindres carrés du point prédit.

Nous pouvons, au lieu d'effectuer une minimisation, nous ramener à une résolution de système non linéaire en utilisant les équations de paramétrisation afin d'avoir autant d'équations que d'inconnues. Dans ce cas, les solveurs non linéaires disponibles dans les bibliothèques Fortran ou Matlab peuvent être employés, surtout dans le cas d'une paramétrisation de type arc-length qui rajoute une équation non linéaire. Dans ce qui suit, nous allons néanmoins souligner quelques façons de procéder dans certains cas particuliers.

### 3.3.3.2 Le correcteur de Newton

Tout d'abord, dans le cas d'une continuation séquentielle, le paramètre de contrôle étant fixé, il ne reste qu'à déterminer les incréments de corrections  ${}^{(i)}\Delta \mathbf{X}$ . Puisque nous n'avons plus que  $N$  inconnues, le système d'équations 3.70 se résout trivialement par :

$${}^{(i)}\Delta \mathbf{X} = - \left[ \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{X}} \left( {}^{(i)}\mathbf{X}, {}^{(i)}\mu \right) \right]^{-1} \cdot \mathbf{H} \left( {}^{(i)}\mathbf{X}, {}^{(i)}\mu \right) \quad (3.72)$$

Le cas d'une paramétrisation sélective est équivalent. En effet, celle-ci revient à fixer une des inconnues du problème. Le système associé peut donc être résolu comme précédemment.

Dans le cas général où le paramètre de contrôle est également une inconnue du problème, le système d'équations linéaires à résoudre au cours d'une étape de correction est, en tenant compte d'une équation de paramétrisation  $P$  :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{X}} \left( {}^{(i)}\mathbf{X}, {}^{(i)}\mu \right) & \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mu} \left( {}^{(i)}\mathbf{X}, {}^{(i)}\mu \right) \\ \frac{\partial P}{\partial \mathbf{X}} \left( {}^{(i)}\mathbf{X}, {}^{(i)}\mu \right) & \frac{\partial P}{\partial \mu} \left( {}^{(i)}\mathbf{X}, {}^{(i)}\mu \right) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} {}^{(i)}\Delta \mathbf{X} \\ {}^{(i)}\Delta \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{H} \left( {}^{(i)}\mathbf{X}, {}^{(i)}\mu \right) \\ P \left( {}^{(i)}\mathbf{X}, {}^{(i)}\mu \right) \end{pmatrix} \quad (3.73)$$

Dans le cas d'une continuation de type pseudo arc-length, compte tenu de la linéarité de



$P$ , ce système peut être réduit à :

$$\left( \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{X}} - \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mu} \cdot \frac{\partial P}{\partial \mathbf{X}} / \frac{\partial P}{\partial \mu} \right) \cdot {}^{(i)}\Delta \mathbf{X} = -\mathbf{H} + \frac{P}{\frac{\partial P}{\partial \mu}} \quad (3.74)$$

où, bien entendu,  $\mathbf{H}$ ,  $P$  et leurs jacobienues sont évaluées en  $({}^{(i)}\mathbf{X}, {}^{(i)}\mu)$  avec :

$${}^{(i)}\mu = \mu^{(p)} - {}^t \Delta \mathbf{X}^{(p)} \cdot \left( {}^{(i)}\mathbf{X} - \mathbf{X}^{(p)} \right) / \Delta \mu^{(p)} \quad (3.75)$$

Cette dernière relation traduit le fait qu'on impose au point corrigé de se trouver sur l'hyperplan orthogonal à la tangente à la courbe solution au point  $(\mathbf{X}^{(p)}, \mu^{(p)})$ .

### 3.3.4 Gestion du pas

Les méthodes de continuation présentées précédemment sont conditionnées par plusieurs incréments ou « pas » :  $\Delta X_k$ ,  $\Delta \mu$ ,  $\Delta s$  ou  $\Delta l$ . En effet, un pas trop grand donnera une mauvaise prédiction c'est-à-dire trop éloignée de la solution et par conséquent, il faudra de nombreuses itérations du correcteur pour converger vers cette dernière. Au contraire, un pas trop petit nécessitera un grand nombre de points à calculer sur la courbe solution et donc un temps de calcul également important. Une solution consiste à adopter un pas variable.

Le principe est d'utiliser la performance du prédicteur/correcteur à l'itération précédente pour en déduire un pas de temps corrigé. Ainsi, pour le calcul de chaque point, le pas de temps considéré peut être égal au pas de temps précédent pondéré par une constante  $\beta$  judicieusement choisie. Ce coefficient peut dépendre du nombre d'itérations  $I$  nécessaires à l'étape précédente et doit pouvoir augmenter le pas si le correcteur a convergé rapidement ( $I$  faible) ou le diminuer si il n'y a pas convergence ou que le nombre d'itérations dépasse un certain seuil. On peut ainsi donner les deux exemples de coefficients suivants :

$$\beta = \frac{I_{opt}}{I} \quad \text{ou} \quad \beta = 2^{(I_{opt}-I)/4} \quad (3.76)$$

où  $I_{opt}$  est le nombre d'itérations souhaité dépendant du solveur utilisé. Par exemple, avec la méthode de Newton-Raphson il est conseillé de prendre  $I_{opt} = 6$  [91]. Enfin, il peut être utile de borner la valeur de  $\beta$  si les formules d'adaptation 3.76 conduisent à des valeurs hors d'une plage raisonnable.

ces méthodes d'estimation du comportement non linéaire des systèmes mécaniques ainsi que les algorithmes de continuation seront appliqués dans la suite de cette thèse sur des modèles d'interaction rotor/stator. Cependant, la validation de ces techniques, sur un modèle de référence, est une étape primordiale qu'il convient donc de réaliser.

### 3.4 Validation des algorithmes

La validation des algorithmes développés dans ce chapitre et leur mise en œuvre au cours de cette thèse est réalisée au travers d'un modèle ayant fait l'objet d'études antérieures. Le modèle que nous allons utiliser est un modèle simple d'interaction rotor/stator sans frottement étudié par David Demailly [17].

#### 3.4.1 Modèle de référence

Ce modèle consiste en un stator possédant deux translations orthogonales  $x_s$  et  $y_s$  et un rotor possédant également deux translations orthogonales  $x_r$  et  $y_r$  dans le repère fixe. La figure 3.8 illustre le système considéré. Si on tient compte de l'accélération de la pesanteur  $g$ , l'équation matricielle du comportement dynamique de ce système s'écrit :

$$\begin{bmatrix} m_r + m_b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_r + m_b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_r \\ \ddot{y}_r \\ \ddot{x}_s \\ \ddot{y}_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_r \\ \dot{y}_r \\ \dot{x}_s \\ \dot{y}_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_r \\ y_r \\ x_s \\ y_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_b e \Omega^2 \cos(\Omega t) \\ m_b e \Omega^2 \sin(\Omega t) - (m_r + m_b)g \\ 0 \\ -m_s g \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

où  $m_s$ ,  $m_r$ ,  $k_s$ ,  $k_r$ ,  $c_s$  et  $c_r$  sont respectivement les masses, les raideurs et les coefficients d'amortissement visqueux du stator et du rotor, ce dernier tournant à la vitesse  $\Omega$ . Le contact entre les deux est supposé initié par une masse de balourd  $m_b$  excentrée d'une distance  $e$  du centre géométrique du rotor. Le contact à lieu si :

$$\sqrt{x_r^2 + y_r^2} > \delta + \sqrt{x_s^2 + y_s^2} \quad (3.78)$$

$\delta$  étant le jeu initial entre les deux structures.

Le comportement de ce système va être estimé par une des méthodes temporelles présentées précédemment. Demailly [17] ayant montré l'existence de solutions périodiques, celles-ci seront confirmées d'abord par une méthode de balance harmonique puis par une méthode de tirs.

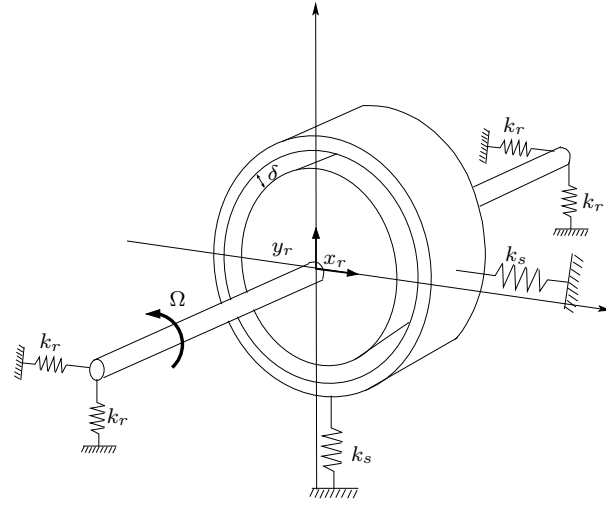


FIG. 3.8 – Modèle de rotor et de stator [17]

### 3.4.2 Intégrations temporelles et procédure de gestion du contact

Nous allons dans un premier temps étudier le comportement dynamique de ce système en effectuant des intégrations temporelles directes. Pour cela, il convient de choisir un algorithme parmi ceux développés dans la section 3.1.1 de ce chapitre. Le caractère non linéaire de notre problème soumet les schémas d'intégrations explicites et implicites aux mêmes précautions concernant leur stabilité, les schémas implicites n'ayant plus, dans ce cas, leur caractère inconditionnellement stable. Une étude précédente de M. Legrand [51] traitant des problèmes de contacts entre rotor et stator semble montrer que le schéma en différences finies centrées est bien adapté à ce genre de problème. Le schéma décrit par l'équation 3.8, avec  $\theta_1 = 1/2$  et  $\theta_2 = 0$ , sera donc dorénavant adopté dans toute cette étude pour estimer le comportement dynamique d'un tel système.

Ce problème non linéaire de contact se traite généralement par une succession d'étapes de prédiction où l'on ne tient pas compte des éventuels contacts puis de corrections dans le cas où les prédictions ont a posteriori détecté un contact. Ces étapes peuvent être détaillées comme suit :

#### Étape de prédiction

Les degrés de liberté du système  $\mathbf{u} = [x_r, y_r, x_s, y_s]^T$  à l'instant  $t_{n+1}$ , que l'on peut donc noter  $\mathbf{u}_{n+1}$ , sont prédits (d'où l'indice  $p$  qui apparaîtra par la suite) à partir des déplacements connus aux instants antérieurs  $\mathbf{u}_n$  et  $\mathbf{u}_{n-1}$  ainsi que des forces à l'instant  $t_n$  selon la relation :

$$\left( \frac{\mathbf{M}}{\Delta t^2} + \frac{\tilde{\mathbf{C}}}{2\Delta t} \right) \mathbf{u}_{n+1,p} = \mathbf{F}_n + \left( 2\frac{\mathbf{M}}{\Delta t^2} - \tilde{\mathbf{K}} \right) \mathbf{u}_n + \left( \frac{\tilde{\mathbf{C}}}{2\Delta t} - \frac{\mathbf{M}}{\Delta t^2} \right) \mathbf{u}_{n-1} \quad (3.79)$$

où  $\mathbf{F}_n$  représente toutes les forces, linéaires ou non, appliquées au système hormis les forces de contact.

### Étape de correction

Si d'après les déplacements prédits, le rotor pénètre dans le stator, conformément au critère 3.78 alors, il faut corriger les degrés de liberté afin de vérifier les deux conditions suivantes :

$$g_{n+1} = \sqrt{(x_{r_{n+1}} - x_{s_{n+1}})^2 + (y_{r_{n+1}} - y_{s_{n+1}})^2} - \delta = \sqrt{((x_{r_{n+1,p}} + x_{r_{n+1,c}}) - (x_{s_{n+1,p}} + x_{s_{n+1,c}}))^2 + ((y_{r_{n+1,p}} + y_{r_{n+1,c}}) - (y_{s_{n+1,p}} + y_{s_{n+1,c}}))^2} - \delta = 0 \quad (3.80)$$

$$\left( \frac{\mathbf{M}}{\Delta t^2} + \frac{\tilde{\mathbf{C}}}{2\Delta t} \right) (\mathbf{u}_{n+1,p} + \mathbf{u}_{n+1,c}) = \mathbf{F}_n + \mathbf{F}_{\text{contact}_{n+1}} + \left( 2\frac{\mathbf{M}}{\Delta t^2} - \tilde{\mathbf{K}} \right) \mathbf{u}_n + \left( \frac{\tilde{\mathbf{C}}}{2\Delta t} - \frac{\mathbf{M}}{\Delta t^2} \right) \mathbf{u}_{n-1} \quad (3.81)$$

où  $\mathbf{u}_{n+1,c} = [x_{r_{n+1,c}}, y_{r_{n+1,c}}, x_{s_{n+1,c}}, y_{s_{n+1,c}}]^T$  sont les corrections à considérer pour valider ces deux conditions. L'équation 3.80 est une condition de compatibilité des déplacements : le rotor ne peut pas pénétrer dans le stator c'est-à-dire que  $g_{n+1}$  ne peut pas être positif donc s'il y a contact, l'écart relatif  $g_{n+1}$  doit être nul. L'équation 3.81 assure quant à elle l'équilibre en force du système lorsque les forces dues au contact  $\mathbf{F}_{\text{contact}_{n+1}}$  sont considérées.

L'équation 3.80 est non linéaire. Celle-ci doit cependant être résolue rapidement car cette succession de prédiction puis correction sera effectuée à chaque pas de temps. Afin d'éviter d'avoir recours à un solveur non linéaire, elle va être linéarisée. En effet, si l'intégration temporelle est effectuée avec des pas de temps faibles, les corrections à considérer sur les degrés de liberté doivent être minimales par rapport à leurs prédictions. Ainsi, l'équation 3.80 peut s'écrire :

$$g_{n+1} \approx \sqrt{(x_{r_{n+1,p}} - x_{s_{n+1,p}})^2 + (y_{r_{n+1,p}} - y_{s_{n+1,p}})^2} - \delta + \frac{x_{r_{n+1,p}} - x_{s_{n+1,p}}}{\sqrt{(x_{r_{n+1,p}} - x_{s_{n+1,p}})^2 + (y_{r_{n+1,p}} - y_{s_{n+1,p}})^2}} (x_{r_{n+1,c}} - x_{s_{n+1,c}}) + \frac{y_{r_{n+1,p}} - y_{s_{n+1,p}}}{\sqrt{(x_{r_{n+1,p}} - x_{s_{n+1,p}})^2 + (y_{r_{n+1,p}} - y_{s_{n+1,p}})^2}} (y_{r_{n+1,c}} - y_{s_{n+1,c}}) = 0 \quad (3.82)$$

soit

$$g_{n+1} \approx g_{n+1,p} + \mathbf{C}_{\mathbf{N}_{n+1,p}}^T \cdot \mathbf{u}_{n+1,c} = 0 \quad (3.83)$$

avec

$$g_{n+1,p} = \sqrt{(x_{r_{n+1,p}} - x_{s_{n+1,p}})^2 + (y_{r_{n+1,p}} - y_{s_{n+1,p}})^2} - \delta \quad (3.84)$$

$$\mathbf{C}_{\mathbf{N}_{n+1,p}} = \begin{bmatrix} \frac{x_{r_{n+1,p}} - x_{s_{n+1,p}}}{\sqrt{(x_{r_{n+1,p}} - x_{s_{n+1,p}})^2 + (y_{r_{n+1,p}} - y_{s_{n+1,p}})^2}} \\ \frac{y_{r_{n+1,p}} - y_{s_{n+1,p}}}{\sqrt{(x_{r_{n+1,p}} - x_{s_{n+1,p}})^2 + (y_{r_{n+1,p}} - y_{s_{n+1,p}})^2}} \\ -\frac{x_{r_{n+1,p}} - x_{s_{n+1,p}}}{\sqrt{(x_{r_{n+1,p}} - x_{s_{n+1,p}})^2 + (y_{r_{n+1,p}} - y_{s_{n+1,p}})^2}} \\ -\frac{y_{r_{n+1,p}} - y_{s_{n+1,p}}}{\sqrt{(x_{r_{n+1,p}} - x_{s_{n+1,p}})^2 + (y_{r_{n+1,p}} - y_{s_{n+1,p}})^2}} \end{bmatrix} \quad (3.85)$$

L'indice  $N$  indique le cas d'un contact normal sans frottement.

Ainsi, compte-tenu de la relation 3.79 vérifiée par les degrés de liberté prédits et de cette dernière équation, les deux conditions 3.80 et 3.81 que doivent satisfaire les degrés de liberté corrigés se résument à :

$$g_{n+1} \approx g_{n+1,p} + \mathbf{C}_{\mathbf{N}_{n+1,p}}^T \cdot \mathbf{u}_{n+1,c} = 0 \quad (3.86)$$

$$\left( \frac{\mathbf{M}}{\Delta t^2} + \frac{\tilde{\mathbf{C}}}{2\Delta t} \right) \mathbf{u}_{n+1,c} = \mathbf{F}_{\text{contact}_{n+1}} \quad (3.87)$$

Il reste maintenant à statuer sur la façon de traiter les forces de contact. D. Demailly a utilisé dans son étude une méthode de pénalité. Dans ce cas, conformément à la section 2.1.5, un potentiel  $\Pi_c^P$  de contact est introduit si bien sûr il y a pénétration du rotor dans le stator :

$$\Pi^P = \frac{1}{2} k_p g^2 \quad (3.88)$$

où  $k_p$  est le paramètre de pénalisation. La force de contact en découlant s'exprime alors, en notant  $u^r = \sqrt{(x_r - x_s)^2 + (y_r - y_s)^2}$ , par :

$$\mathbf{F}_{\text{contact}} = \mathbf{F}_{\text{contact}}^P = k_p \frac{g}{u^r} \begin{bmatrix} -(x_r - x_s) \\ -(y_r - y_s) \\ (x_r - x_s) \\ (y_r - y_s) \end{bmatrix} \quad \text{si } g > 0 \quad (3.89)$$

Dans ce cas, les degrés de liberté corrigés s'obtiennent directement d'après l'équation 3.87 c'est-à-dire :

$$\mathbf{u}_{n+1,c} = \left( \frac{\mathbf{M}}{\Delta t^2} + \frac{\tilde{\mathbf{C}}}{2\Delta t} \right)^{-1} k_p \frac{g_{n+1,p}}{u_{n+1,p}^r} \begin{bmatrix} -(x_{r_{n+1,p}} - x_{s_{n+1,p}}) \\ -(y_{r_{n+1,p}} - y_{s_{n+1,p}}) \\ (x_{r_{n+1,p}} - x_{s_{n+1,p}}) \\ (y_{r_{n+1,p}} - y_{s_{n+1,p}}) \end{bmatrix} \quad (3.90)$$

C'est donc seulement si la force de contact est bien estimée que la contrainte de non pénétration du rotor dans le stator, exprimée par l'équation 3.80, sera elle aussi correctement vérifiée. On voit donc bien, comme nous l'avons précisé dans la section 2.1.5 que la méthode de pénalité supprime en quelques sortes les contraintes du problème de contact.

Dans cette thèse, la méthode que nous allons adopter pour traiter le contact est une méthode des multiplicateurs de Lagrange. Celle-ci est, comme nous allons le montrer, bien plus rigoureuse que la méthode de pénalité. Dans ce cas, conformément à la section 2.1.5, on introduit un travail associé au multiplicateur  $\lambda_N$ , lui même associé au contact normal sans frottement :

$$W^{ML} = \lambda_N (-g) \quad (3.91)$$

de sorte que la contrainte à vérifier lors du contact unilatéral soit :  $-g \geq 0$ , conformément au chapitre 2 (section 2.1.2, équation 2.2). La force de contact qui en découle s'exprime alors par :

$$\mathbf{F}_{\text{contact}} = \mathbf{F}_\lambda = -\mathbf{C}_N \lambda_N \quad (3.92)$$

Dans ce cas, il faut résoudre le système de deux équations (l'opposée de l'équation 3.86 et l'équation 3.87) à deux inconnues  $\mathbf{u}_{n+1,c}$  et  $\lambda_{N_{n+1}}$ . Les solutions de ce système s'expriment alors par :

$$\lambda_{N_{n+1}} = \left[ \mathbf{C}_{N_{n+1},p}^T \left( \frac{\mathbf{M}}{\Delta t^2} + \frac{\tilde{\mathbf{C}}}{2\Delta t} \right)^{-1} \mathbf{C}_{N_{n+1},p} \right]^{-1} g_{n+1,p} \quad (3.93)$$

$$\mathbf{u}_{n+1,c} = - \left( \frac{\mathbf{M}}{\Delta t^2} + \frac{\tilde{\mathbf{C}}}{2\Delta t} \right)^{-1} \mathbf{C}_{N_{n+1},p} \lambda_{N_{n+1}} \quad (3.94)$$

Tout d'abord assurons nous de la capacité à converger de la procédure temporelle choisie. La figure 3.9 représente le résultat d'une intégration temporelle pour ce système, avec deux pas de temps différents, dans le cas où le rotor tourne à  $\Omega = 1272$  tr/min. Ces courbes, représentant les orbites du rotor, du stator, ainsi que l'évolution des jeux entre ces deux structures au cours du temps, montrent que l'algorithme temporel a bien convergé puisque pour deux pas de temps ayant un rapport de deux entre eux, les courbes sont confondues.

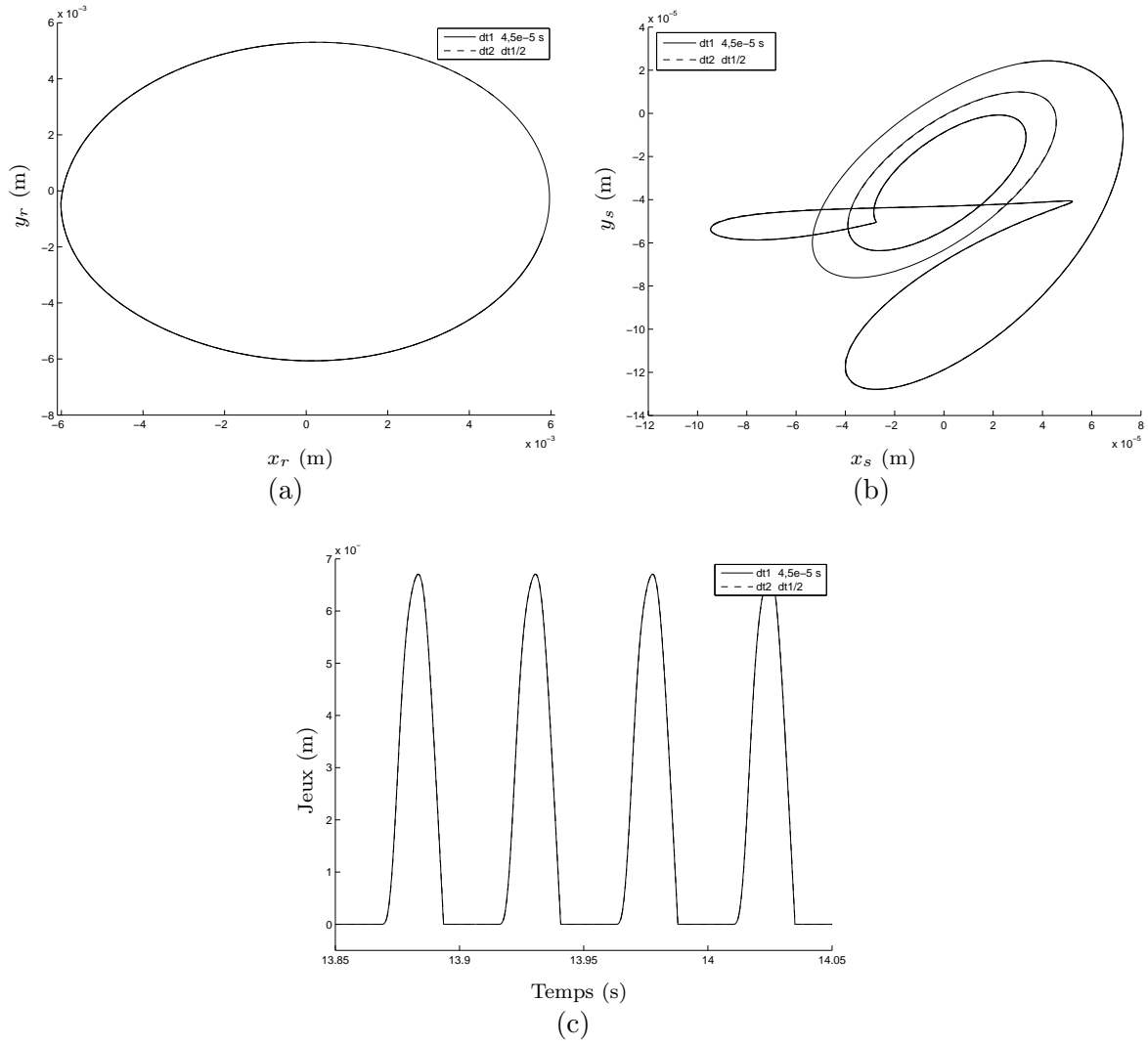


FIG. 3.9 – Intégration temporelle du système de Demailly [17], à  $\Omega = 1272$  tr/min, avec une méthode de différences finies centrées couplée à des multiplicateurs de Lagrange, avec deux pas de temps différents

Comparons maintenant, grâce aux figures 3.10 et 3.11, ces résultats, obtenus avec un schéma en différences finies centrées couplé à des multiplicateurs de Lagrange (représenté en traits pointillés) et ceux obtenus par Demailly avec une méthode de pénalité (représenté en traits pleins). Il apparaît sur ces figures, que l'orbite du rotor obtenue par les deux méthodes est identique. Par contre, en ce qui concerne l'orbite du stator, bien que dans les deux cas le motif global soit le même, certaines différences apparaissent. Avec la méthode de pénalité, l'orbite du stator paraît plus complexe que celle obtenue par des multiplicateurs de Lagrange. Ceci peut se comprendre en regardant l'évolution des jeux entre les deux structures (Cf. figure 3.11 (a)). Une période de ce système est composée d'une phase de décollement prononcée où le jeu atteint  $0,7$  mm puis, d'une phase de collement. C'est principalement cette phase qui diffère en fonction de la méthode employée. Avec une méthode de pénalité, la prise de contact se fait par une succession de rebonds. Ainsi, selon Demailly, au cours d'une période, le système est le siège de 5 prises de contact. Cependant, ceci revient à autoriser des jeux négatifs, ce qui

n'est pas physiquement admissible. Avec un multiplicateur de Lagrange, la prise de contact est « propre » : le jeu est nul lorsque les structures sont en contact. En figure 3.11 (b), sont représentés les spectres fréquentiels associés aux évolutions des jeux entre les structures obtenus par chacune des méthodes. D'après ce qui vient d'être dit, il n'est pas surprenant que le spectre associé à la méthode de pénalité soit plus complexe que celui associé à un multiplicateur de Lagrange. On peut heureusement noter que le fondamental et les harmoniques de ces spectres sont cependant les mêmes. Ainsi, les résultats obtenus par ces deux méthodes sont globalement semblables. Par contre, la prise de contact dans le cas d'un multiplicateur de Lagrange est bien plus rigoureuse qu'avec une méthode de pénalité, ce qui conforte le choix de la procédure de gestion du contact dans cette étude.

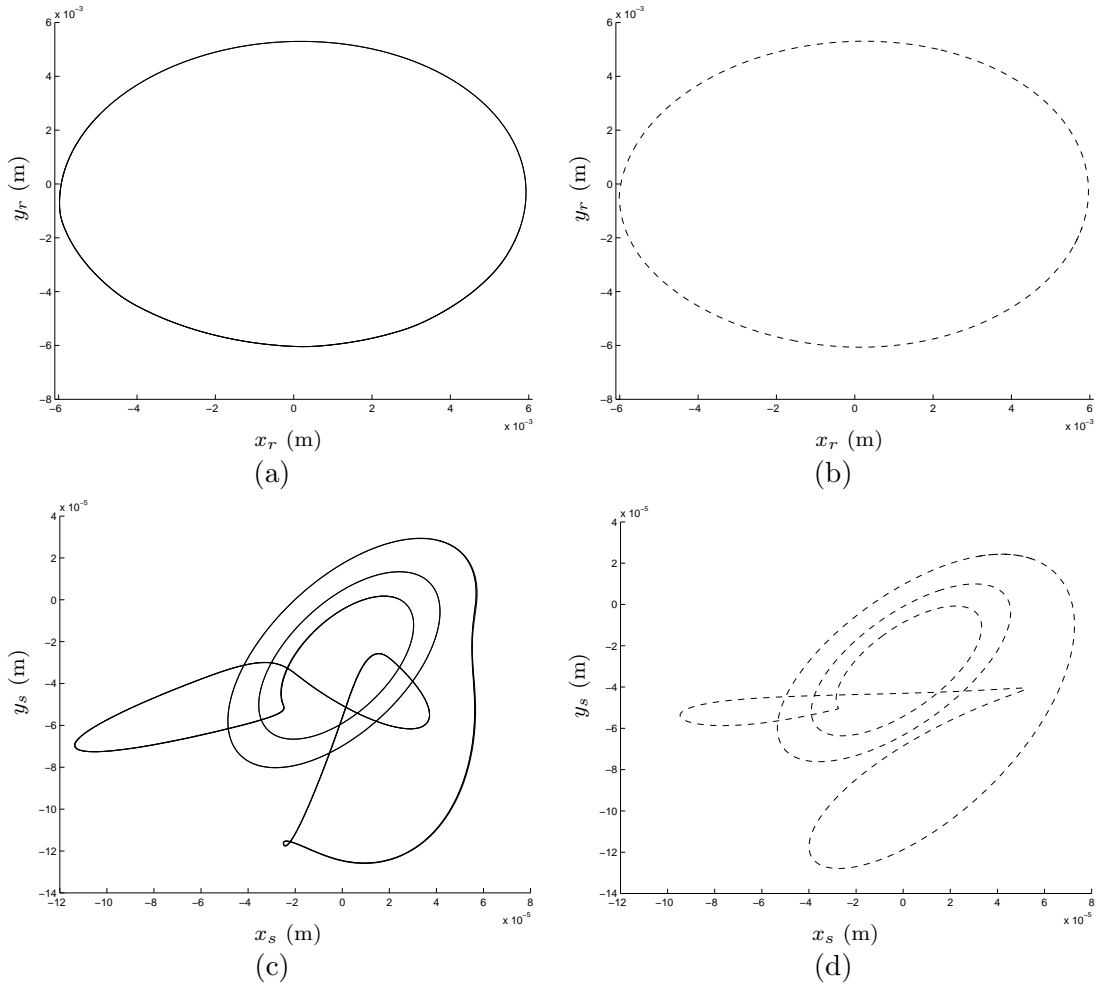


FIG. 3.10 – Comparaison des résultats de Demailly [17] (a) orbite du rotor, (c) orbite du stator, avec ceux obtenus par la méthode choisie au cours de cette étude (b) orbite du rotor, (d) orbite du stator



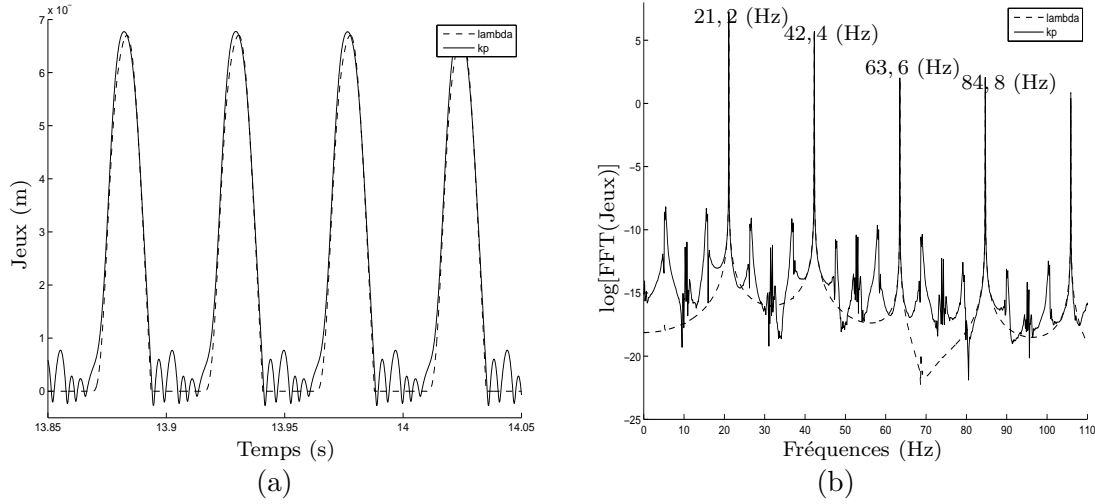


FIG. 3.11 – Comparaison (a) des évolutions des jeux entre les deux structures du modèle de Demailly [17] et de celles obtenues par la procédure choisie au cours de cette étude, (b) du spectre fréquentiel associé aux jeux

### 3.4.3 Approche par méthode de balance harmonique

Puisque le régime étudié est périodique, de période connue, nous allons pouvoir valider les procédures fréquentielles et temporelles d'étude de ces solutions décrites au chapitre 3. Commençons tout d'abord par la méthode de la balance harmonique. L'équation 3.32, dans laquelle  $\mathbf{F}_{NL} = \mathbf{F}_\lambda$  et où  $\mathbf{F}(t)$  est précisée dans l'équation 3.77, va être résolue grâce à un solveur non linéaire de Matlab utilisant un algorithme de Gauss-Newton ou Levenberg-Marquardt. L'estimation des forces de contact va se faire en utilisant une procédure AFT et selon les relations 3.93 et 3.94. Pour cela, le solveur est initialisé avec une décomposition en série de Fourier  $\mathbf{X}_p$  des degrés de liberté « prédits » du système, obtenus par une intégration temporelle directe. Conformément à la notation utilisée dans la partie précédente, ces degrés de liberté « prédits » ne tiennent pas compte des éventuels contacts apparaissant à l'instant  $t$ , en accord avec la procédure d'intégration temporelle développée dans la section 3.4.2. La procédure AFT alors utilisée consiste à recomposer les coefficients de Fourier des degrés de liberté afin de repasser dans le domaine temporel. Les éventuels contacts sont alors décelés à partir des déplacements prédits, tout comme dans la procédure temporelle détaillée précédemment, et les forces de contact ainsi que les corrections des degrés de liberté sont, le cas échéant, estimés grâce aux relations 3.93 et 3.94. Les coefficients de Fourier de ces deux grandeurs sont ensuite calculés et le résidu à minimiser s'exprime par l'équation 3.32 dans laquelle  $\mathbf{X} = \mathbf{X}_p + \mathbf{X}_c$  où  $\mathbf{X}_c$  est le vecteur des coefficients de Fourier des corrections à apporter aux degrés de liberté du système. Nous allons voir jusqu'à quel ordre de troncature il est nécessaire d'aller pour que l'algorithme converge vers une solution acceptable. Il se trouve que pour une série de Fourier tronquée à trois harmoniques, l'algorithme tend vers un minimum qui bien sûr n'est pas une racine de l'équation 3.32, compte-tenu de l'ordre de troncature très faible et qui de plus, n'est pas du tout acceptable, comme le montre la figure 3.12. Celle-ci montre que d'après la solution

ainsi obtenue, le rotor ne touche jamais le stator (Cf. figure 3.12 (c)). Par contre, l'orbite du rotor étant extrêmement simple, cet ordre de troncature semble être déjà suffisant (Cf. figure 3.12 (a)). Nous ne nous intéresserons dorénavant plus à son orbite.

A partir d'une troncature à l'ordre 5, les résultats commencent d'avantage à ressembler à la solution de l'intégration temporelle comme en atteste les figures 3.13 (a) et (b). Il faut remarquer que, le fait de développer en série de Fourier tronquée les degrés de liberté, ne permet pas de restituer la discontinuité du jeu lors de la prise de contact. Ainsi, on voit sur les figures 3.12 (c) et 3.13 (b) que lorsque les deux structures entrent en contact et que le jeu devient nul, la solution harmonique continue à osciller. Bien sûr, plus il y aura d'harmoniques considérées, plus la solution alors recherchée pourra approcher la discontinuité des jeux. Les figures 3.13 (c) et (d) comparent les résultats d'une intégration directe avec ceux obtenus par balance harmonique lorsque 20 harmoniques sont considérés. Les courbes sont, dans ce cas très proches et cette troncature peut être considérée comme suffisante, d'autant plus que pour des troncatures plus élevées, les résultats varient peu.

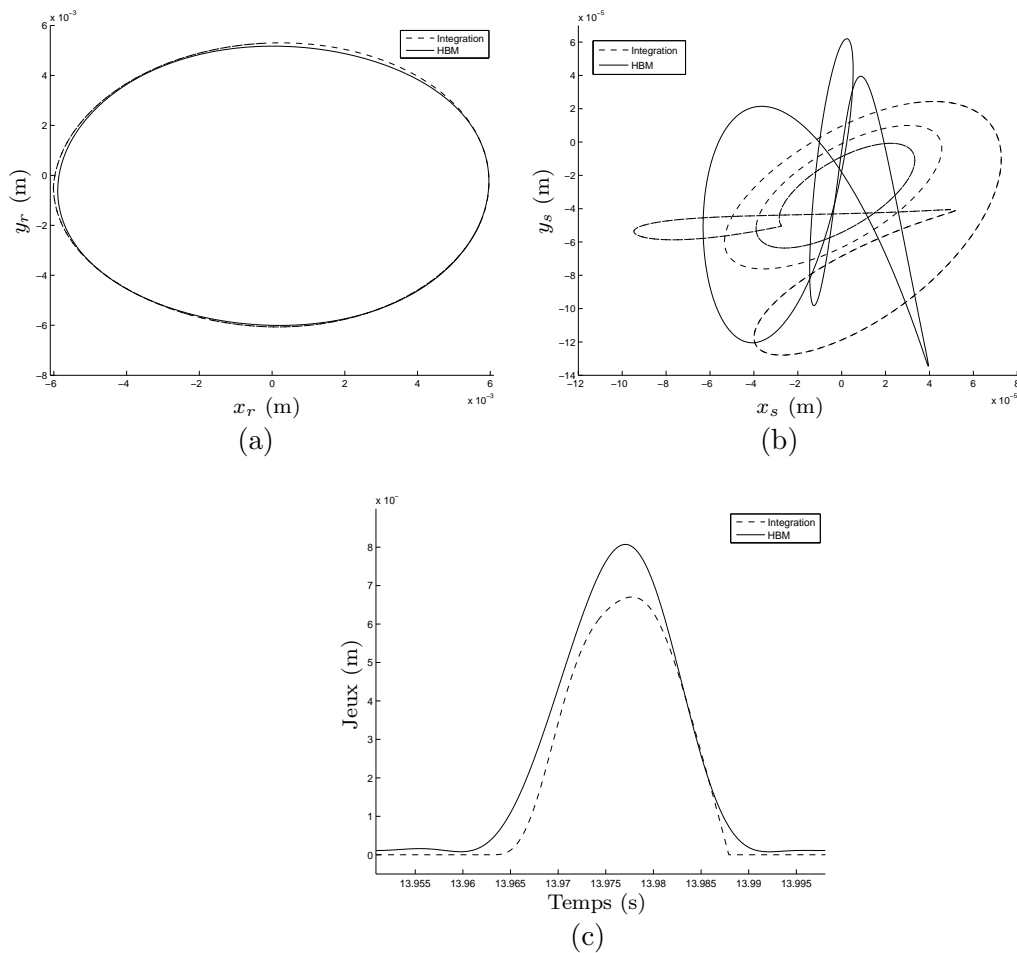


FIG. 3.12 – Comparaison des résultats obtenus par balance harmonique avec 3 harmoniques et ceux obtenus par intégration temporelle directe au niveau de l'orbite du rotor (a), de l'orbite du stator (b) et de l'évolution des jeux (c)

Cette méthode de balance harmonique (HBM) donne donc des résultats tout à fait satisfaisants. Par contre, l'écart relatif sur la condition initiale, autorisé pour pouvoir néanmoins converger vers une solution convenable, est très faible. Ainsi, avec 20 harmoniques considérées, la méthode de balance harmonique appliquée à ce système ne pourra converger vers une solution très proche de celle obtenue par intégration directe que si l'écart entre l'initialisation de l'algorithme et cette solution n'excède pas 0,01 %.

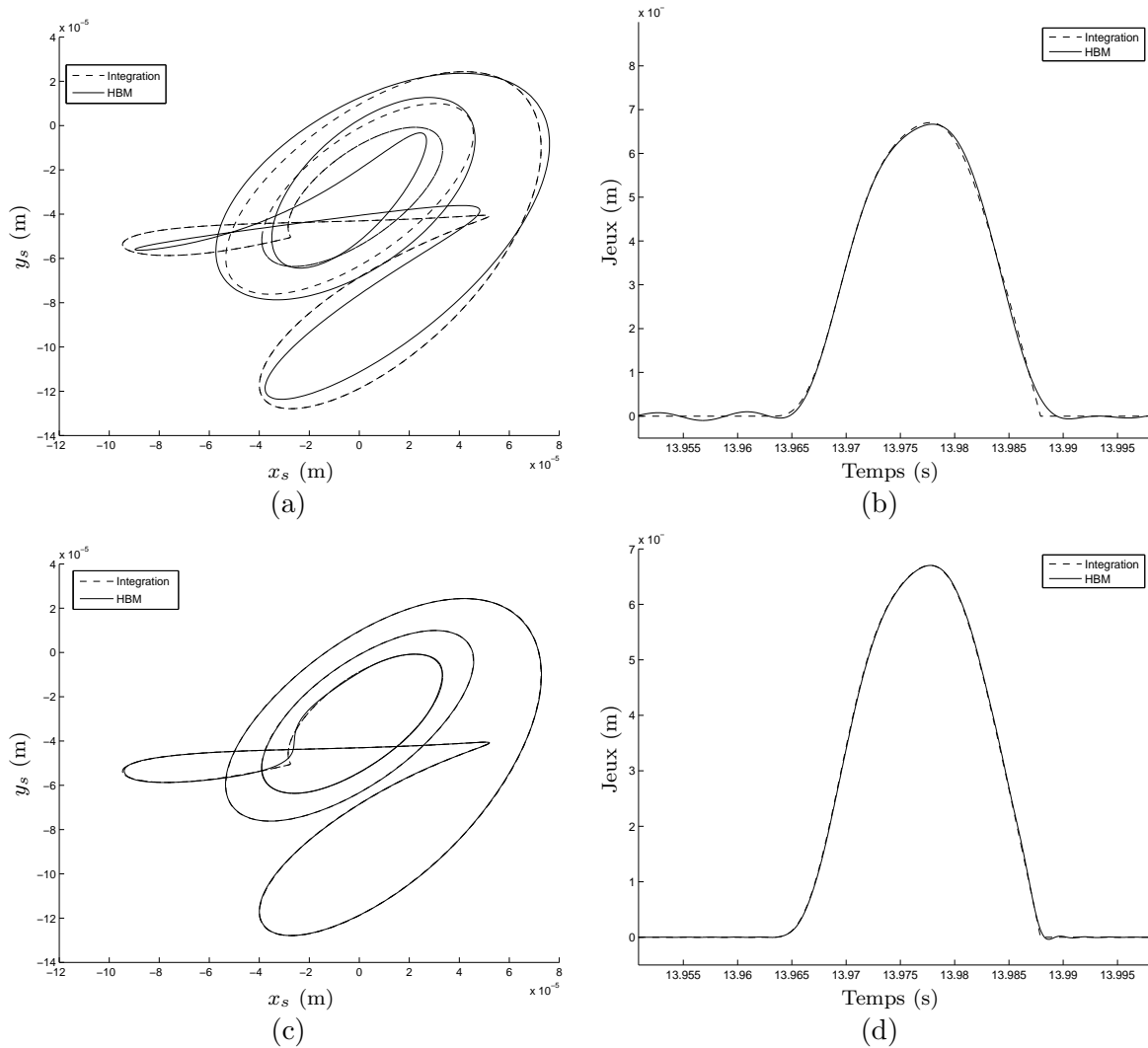


FIG. 3.13 – Comparaison des résultats obtenus par balance harmonique et ceux obtenus par intégration temporelle directe au niveau (a) de l'orbite du stator avec 5 harmoniques, (b) de l'évolution des jeux avec 5 harmoniques, (c) de l'orbite du stator avec 20 harmoniques et (d), de l'évolution des jeux avec 20 harmoniques

### 3.4.4 Approche par méthode de shooting

La méthode de shooting (de tirs), a également été implémentée sur cet exemple. Dans un premier temps, nous allons considérer la période de la réponse connue (ce qui est le cas). Nous n'allons donc chercher qu'à corriger les degrés de liberté du système conformément à la première ligne de la relation 3.25. Le calcul de la jacobienne des forces (Cf. équations 3.22 et 3.23) se fait par différences finies. La figure 3.14 compare les résultats (exceptés les déplacements elliptiques du rotor qui, du fait de leur simplicité, ne permettent pas de comparaisons significatives) obtenus par cette méthode avec ceux issus d'une intégration temporelle directe. Ceux-ci sont quantitativement très proches. On peut remarquer que, les contacts étant traités de façon « directe », par des multiplicateurs de Lagrange, les forces de contact sont discontinues comme le montre la figure 3.14 (c) où sont représentés, sur une période,  $\lambda_N$  ainsi que la première composante de la force de contact définie par la relation 3.92. Le gradient de cette dernière force est également représenté sur la figure 3.14 (d). Maintenant, si nous décidons de corriger également la période de la réponse et que nous initialisons l'algorithme par le résultat de la solution temporelle, perturbée au niveau de sa période ainsi qu'au niveau de sa pulsation, les résultats obtenus sont représentés sur la figure 3.15. Dans ces deux cas d'application de la méthode de shooting, l'initialisation ne doit pas être éloignée de plus de 0,1 % de la solution, ce qui fut le cas pour les deux derniers résultats présentés en figures 3.14 et 3.15. Cependant, bien que dans le cas où la période est corrigée, l'algorithme converge, la solution obtenue présente un décalage par rapport à la solution issue d'une intégration temporelle (Cf. figure 3.15). Celui-ci peut être diminué en utilisant une méthode de shooting multiple. Celle-ci consiste en une succession de méthodes de shooting sur des subdivisions de la période présumée du système. Plus concrètement, il s'agit de découper la période présumée de la réponse en  $M$  intervalles. Sur chacun de ces intervalles est ensuite appliquée une méthode de shooting. Ceci implique par contre qu'il faut multiplier par  $M$  le nombre de conditions initiales et qu'il va falloir toutes les corriger afin d'avoir une continuité de la solution. C'est-à-dire que la condition initiale supposée du système sur l'intervalle  $j$  doit être égale à l'état final du système après une intégration sur l'intervalle  $j - 1$ . Cette relation, entre l'état final au dernier intervalle et l'état initial au premier intervalle s'exprime par la condition de périodicité de la solution globale (Cf. équation 3.16). En procédant comme en section 3.1.2, on montre que l'équation de correction 3.25 s'écrit dans le cas du shooting multiple :

$$\begin{bmatrix}
 \mathbf{\Gamma}_0(t_1; \eta_0, t_0) & -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \mathbf{0} \\
 \mathbf{0} & \ddots & \ddots & & & \vdots \\
 \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\
 \mathbf{0} & & & \ddots & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\
 -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{\Gamma}_{M-1}(t_M; \eta_{M-1}, t_{M-1}) & \tilde{\mathbf{F}}_{M-1}(t_M; \eta_{M-1}, t_{M-1}) \\
 \tilde{\mathbf{F}}_0^T(t_1; \eta_0, t_0) & \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{0}
 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta\eta_0 \\ \vdots \\ \Delta\eta_{M-1} \Delta t_M \end{bmatrix} =
 \begin{bmatrix}
 \eta_1 - \mathbf{Y}_0(t_1; \eta_0, t_0) \\
 \vdots \\
 \eta_0 - \mathbf{Y}_{M-1}(t_M; \eta_{M-1}, t_{M-1}) \\
 0
 \end{bmatrix}
 \quad (3.95)$$

où les indices de 0 à  $M - 1$  correspondent aux intervalles et la notation  $\mathbf{Y}_0(t_1; \eta_0, t_0)$  signifie, en gardant les notations de la section 3.1.2 : « la valeur de  $\mathbf{Y}_0$  à l'instant  $t_1$ , calculée à partir des conditions initiales  $(\eta_0, t_0)$ . Dans cette procédure, le choix a été fait de ne corriger la période de la solution qu'au travers de la longueur du dernier intervalle. L'application de cette méthode au modèle de Demailly donne les résultats représentés par la figure 3.16. Nous voyons ainsi que le décalage qu'il y avait dans le cas du shooting « simple » est considérablement réduit. L'inconvénient de cette méthode est qu'elle augmente le nombre de conditions initiales à considérer et qu'ainsi, la convergence de l'algorithme est plus lente.

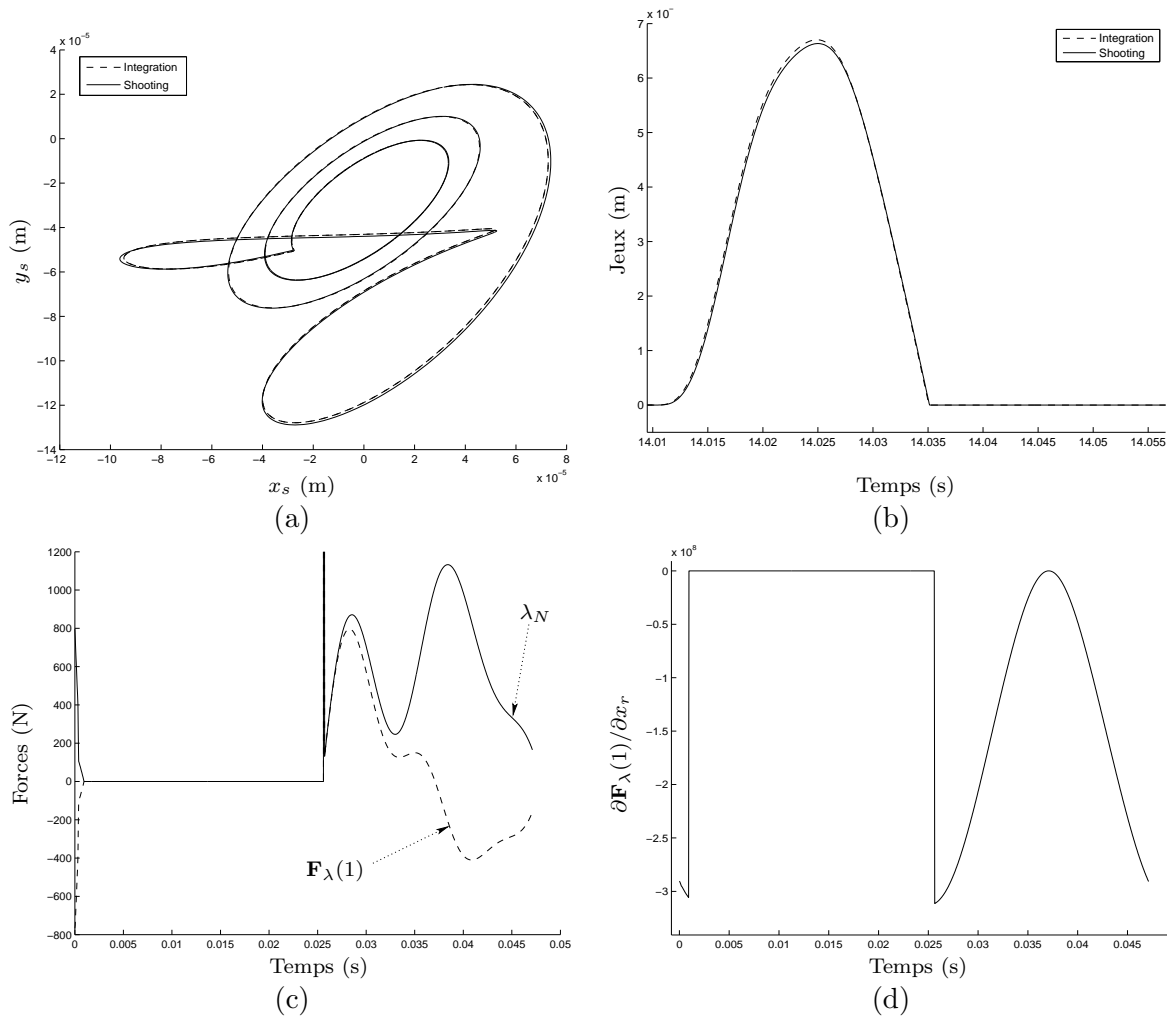


FIG. 3.14 – Comparaison des résultats obtenus par shooting, à période fixée, et ceux obtenus par intégration temporelle directe au niveau (a) de l'orbite su stator, (b) de l'évolution des jeux, (c) évolution des forces et (d), évolution du gradient d'une des forces

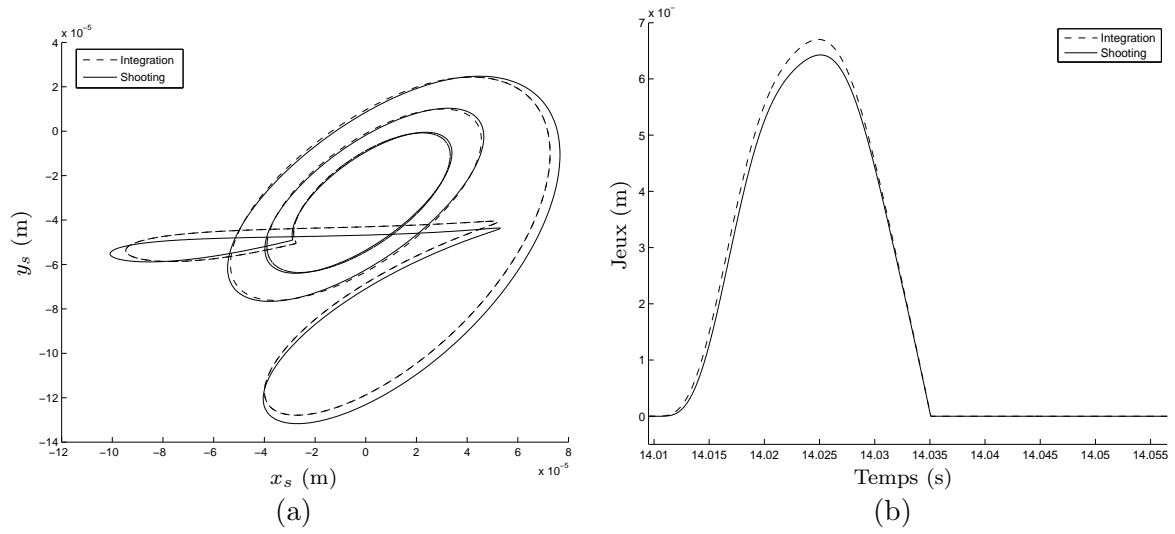


FIG. 3.15 – Comparaison des résultats obtenus par shooting et ceux obtenus par intégration temporelle directe au niveau (a) de l'orbite su stator, (b) de l'évolution des jeux

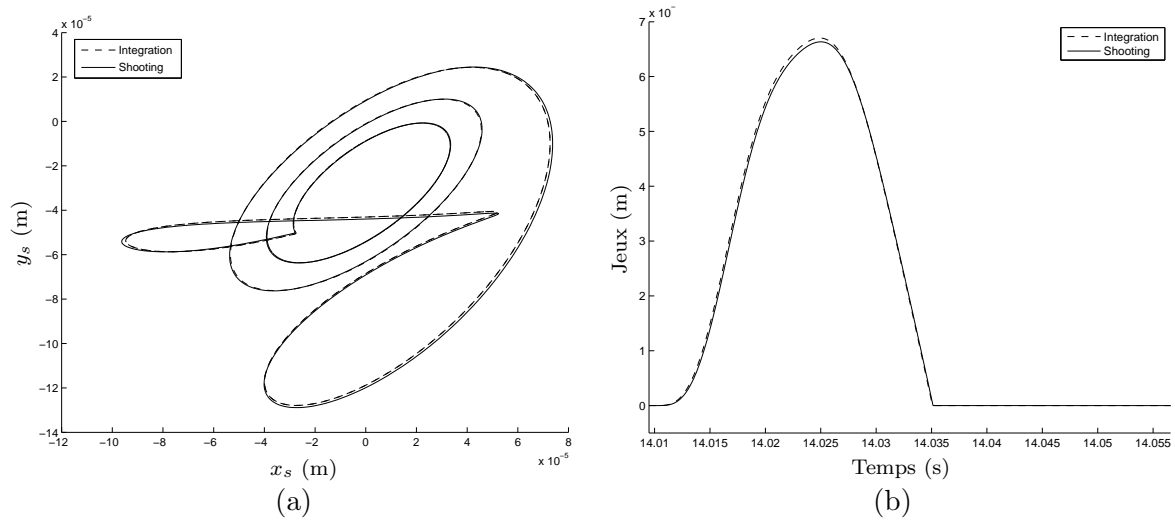


FIG. 3.16 – Comparaison des résultats obtenus par shooting multiple et ceux obtenus par intégration temporelle directe au niveau (a) de l'orbite su stator, (b) de l'évolution des jeux

Ainsi, au travers de cette section, les principales méthodes détaillées théoriquement dans ce chapitre ont été validées. Il s'avère que la procédure d'intégration temporelle choisie paraît bien adaptée à l'étude de contacts entre structures. Les méthodes d'étude de solutions périodiques c'est-à-dire la balance harmonique et le shooting, parviennent, dans ce cas simple, à déterminer des solutions périodiques en ajustant ou non la période de la réponse. Des algorithmes de continuation ont également été mis en œuvre sur ce système et permettent de suivre les solutions de celui-ci. Par contre, il faut veiller à ce que les prédictions soient faites avec un incrément d'abscisse curviligne  $\Delta s$  faible, compte-tenu du faible écart autorisé par ces méthodes pour converger vers la solution.

### 3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, les méthodes d'étude des systèmes non linéaires les plus courantes ont été développées et validées. Elles sont généralement efficaces sur des systèmes de petites dimensions comportant de faibles non linéarités. Par contre, dans le cas des systèmes de grande taille et comportant de fortes non linéarités, de nombreuses limites à ces méthodes peuvent apparaître.

Typiquement, les temps nécessaires pour effectuer des intégrations temporelles directes peuvent être excessifs si les pas de temps requis sont très petits. Les méthodes fréquentielles peuvent quant à elles être coûteuses en taille mémoire allouée de même qu'en temps de calcul si la réponse du système non linéaire nécessite la prise en compte d'un grand nombre d'harmoniques. Enfin, des problèmes purement numériques de conditionnement matriciel peuvent également rendre ces méthodes inapplicables.

Il faut noter que les méthodes fréquentielles permettent la détermination de solutions instables. Dans ce cas, la stabilité des solutions obtenues doit être étudiée a posteriori. De plus, la stabilité des systèmes mécaniques constituant un point clé de cette thèse, les notions de stabilité et la théorie sur laquelle elles reposent vont être développées dans le chapitre suivant.

## Chapitre 4

# Etude de stabilité non linéaire

Une des particularités des systèmes non linéaires est de présenter un nombre de solutions qui ne peut être prédit, contrairement au cas linéaire. Les méthodes fréquentielles présentées précédemment permettent de déterminer des comportements périodiques d'un système non linéaire. Cependant, bien que ces solutions vérifient l'équation différentielle du mouvement d'un tel système, il se peut très bien qu'elles ne soient jamais observées. Elles peuvent en effet être instables, dépourvues de bassin d'attraction c'est-à-dire que tout mouvement initié à partir d'une condition initiale quelconque s'éloigne de cet état pour se stabiliser sur un autre état d'équilibre stable (mais pas forcément périodique) ou divergentes (en cas d'absence de solution bornée).

De plus, l'évolution du comportement d'un système non linéaire en fonction d'un paramètre de contrôle peut présenter des changements importants appelés « bifurcations ». Ainsi, si plusieurs solutions de l'équation du mouvement du système coexistent, celui-ci peut, suite à une variation de son paramètre de contrôle, sauter de l'une à l'autre pouvant alors amener le système hors de sa plage de fonctionnement normale.

Pour toutes ces raisons, il est fondamental d'étudier la stabilité des solutions de l'équation du mouvement d'un système non linéaire. Les types de solutions possibles seront d'abord introduits avant de définir concrètement leur stabilité puis de détailler les grandes catégories de bifurcations. Une attention particulière sera ensuite portée à la stabilité des solutions périodiques et les outils classiques d'étude de stabilité seront présentés. Enfin, un exemple d'application d'un de ces outils, dans le domaine temporel, sera donné, au travers du modèle simple d'interaction rotor/stator utilisé au chapitre 3.



## 4.1 Les types de solutions

Considérons le système non linéaire non autonome suivant :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t, \mu) \quad (4.1)$$

où  $\mathbf{f} \in C^1(U)$ ,  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $\mu$ , un paramètre de contrôle. Dans cette expression, le point représente une différenciation par rapport au temps. Un système sera dit autonome si le temps n'apparaît pas explicitement dans la relation 4.1.

Il est possible de distinguer quatre grandes catégories de solutions :

- **Les solutions de type point fixe ou point d'équilibre** :  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  est un point d'équilibre de l'équation 4.1 si :

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, t, \mu) = \mathbf{0} \quad (4.2)$$

- **Les solutions périodiques** :  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  est une solution périodique de l'équation 4.1 si :

$$\exists T > 0 / \forall t > 0, \mathbf{x}(t + T) = \mathbf{x}(t) \quad (4.3)$$

- **Les solutions quasi-périodiques** : ce sont des solutions dynamiques caractérisées par deux ou plusieurs fréquences incommensurables (c'est-à-dire que leur rapport n'est pas rationnel). Leur spectre n'est donc pas constitué uniquement d'harmoniques ou de sous-harmoniques d'une fréquence principale. Il n'y a pas de moyen simple de les caractériser sans passer par un portrait de phase ou une section de Poincaré comme nous le verrons ultérieurement.
- **Les solutions chaotiques** : elles sont également difficiles à caractériser. Elles sont généralement définies par opposition aux trois autres types de solutions. Néanmoins, on peut citer les exposants de Lyapunov qui permettent de les caractériser [68].

Une fois ces solutions définies, leur stabilité va pouvoir être étudiée.

## 4.2 Définitions et notions de stabilité globale

La notion de stabilité est large. En mécanique, il en existe plusieurs, l'idée sous-jacente étant néanmoins toujours la stabilité au sens commun du terme. Dans cette partie, il s'agit de la notion de stabilité globale d'un système qui sera définie.

La définition la plus connue est celle de Lyapunov : une solution  $\mathbf{x}$  de l'équation 4.1 est dite stable au sens de Lyapunov si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 / \forall \mathbf{y} \text{ solution de 4.1, } \|\mathbf{y}(\mathbf{t}_0) - \mathbf{x}(\mathbf{t}_0)\|_2 < \delta \Rightarrow \forall t > t_0, \|\mathbf{y}(\mathbf{t}) - \mathbf{x}(\mathbf{t})\|_2 < \epsilon \quad (4.4)$$

Si de plus le critère  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\mathbf{y}(t) - \mathbf{x}(t)\|_2 = 0$  est vérifié, la stabilité est qualifiée d'asymptotique. Cette définition est tout à fait adaptée à l'étude de stabilité des points fixes. Par contre, elle s'avère trop restrictive pour l'étude de stabilité des solutions dynamiques. En effet, dans son ouvrage [68], Nayfeh considère un système conservatif dont la pulsation de la solution périodique dépend des conditions initiales du problème. Ainsi, deux solutions initiées par des conditions initiales légèrement différentes (distantes de  $\delta$ , pour se ramener à la définition précédente), peuvent évoluer à des fréquences différentes et donc, après un temps très grand, se trouver éloignées l'une de l'autre, bien qu'initialement elles étaient très proches. Ces solutions périodiques ne peuvent donc pas être considérées comme stables selon la définition de Lyapunov. On a, pour ce type de solution, recours à la notion de stabilité orbitale introduite par Poincaré. Tout d'abord, il faut savoir, en considérant l'équation 4.1, qu'on appelle orbite ou trajectoire passant par  $\mathbf{x}$ , tout simplement une solution du système 4.1 passant par  $\mathbf{x}$ . Soient  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  deux solutions du système d'équations différentielles 4.1, d'orbites respectives  $C_1$  et  $C_2$ .  $C_1$  est orbitalement stable au sens de Poincaré si :

$$\begin{aligned} \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \|\mathbf{y}(t = \tau) - \mathbf{x}(t = 0)\|_2 < \delta, \tau \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow \exists (t_1, t_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \|\mathbf{y}(t_2) - \mathbf{x}(t_1)\|_2 < \epsilon \end{aligned} \quad (4.5)$$

On examine comment une autre solution reste à proximité de l'orbite  $C_1$  étudiée. La notion de stabilité asymptotique de  $C_1$  existe également si  $C_1 \rightarrow C_2$  quand  $t \rightarrow +\infty$ . Enfin, on trouve également une définition très large de la stabilité, celle de Lagrange : une solution  $\mathbf{x}$  est stable au sens de Lagrange si  $\exists M > 0, \forall t > t_0, \|\mathbf{x}(t)\|_2 < M$  c'est-à-dire si elle est bornée.

Pratiquement, il est très difficile de démontrer la stabilité globale d'une solution. Les études consistent alors principalement en l'étude de la stabilité locale d'une solution au voisinage d'un point d'équilibre. Dans tout ce qui suit, les notions et critères de stabilité qui seront abordés seront relatifs à la stabilité locale des solutions.

### 4.3 Stabilité locale des points d'équilibre

Soit  $(\mathbf{x}_0, \mu_0)$  un point d'équilibre du système autonome :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mu) \quad (4.6)$$

Nous allons étudier la stabilité locale de cette solution au voisinage de ce point d'équilibre. Considérons une légère perturbation  $\mathbf{y}$  de cette solution de sorte que celle-ci s'écrive désormais  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{y}(t)$ . Le système 4.6 devient alors, au point  $(\mathbf{x}, \mu_0)$  :

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{y}, \mu_0) \quad (4.7)$$

Un développement en série de Taylor au premier ordre de  $\mathbf{f}$  donne, en tenant compte du fait

que  $(\mathbf{x}_0, \mu_0)$  est un point fixe pour le système 4.6 :

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{J}_{(\mathbf{x}_0, \mu_0)}(\mathbf{f}) \cdot \mathbf{y} \quad \text{avec} \quad \mathbf{J}_{(\mathbf{x}_0, \mu_0)}(\mathbf{f}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_N} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_N}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_N}{\partial x_N} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Les valeurs propres de  $\mathbf{J}$ , jacobienne de  $\mathbf{f}$  au point  $(\mathbf{x}_0, \mu_0)$ , vont nous donner des informations sur la stabilité locale de ce point fixe. En effet, la solution du système 4.8 passant par la condition initiale  $\mathbf{y}_0$  à l'instant  $t_0$  s'écrit :

$$\mathbf{y}(t) = e^{(t-t_0)\mathbf{J}_{(\mathbf{x}_0, \mu_0)}(\mathbf{f})} \cdot \mathbf{y}_0 \quad \text{avec} \quad e^{(t-t_0)\mathbf{J}_{(\mathbf{x}_0, \mu_0)}(\mathbf{f})} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^j}{j!} \mathbf{J}_{(\mathbf{x}_0, \mu_0)}^j(\mathbf{f}) \quad (4.9)$$

Si les valeurs propres de  $\mathbf{J}$  sont distinctes alors, il existe une matrice  $\mathbf{P}$  telle que  $\mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{D}$  où  $\mathbf{D}$  est une matrice diagonale dont les éléments sont les valeurs propres  $\lambda_i$  de  $\mathbf{J}$  et où les colonnes de  $\mathbf{P}$  sont constituées des vecteurs propres de  $\mathbf{J}$ . Dans ce cas,  $\mathbf{y}$  peut s'exprimer par :

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{P} \cdot e^{(t-t_0)\mathbf{D}} \cdot \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{y}_0 \quad (4.10)$$

Dans cette expression  $e^{(t-t_0)\mathbf{D}}$  est une matrice diagonale dont les éléments sont  $e^{(t-t_0)\lambda_i}$ . Les valeurs propres de  $\mathbf{J}$  sont ainsi appelées exposants caractéristiques associés à  $\mathbf{f}$  en  $(\mathbf{x}_0, \mu_0)$ .

Si les valeurs propres de  $\mathbf{J}$  ne sont pas toutes distinctes, on peut utiliser sa forme canonique de Jordan c'est-à-dire  $\exists \mathbf{P}, \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{C}$  où les colonnes de  $\mathbf{P}$  sont également les vecteurs propres généralisés correspondant aux valeurs propres  $\lambda_i$  de  $\mathbf{J}$ . Dans ce cas, l'expression de  $\mathbf{y}$  contient des termes de la forme  $t^k e^{(t-t_0)\lambda_i}$  où  $k$  dépend de la multiplicité de  $\lambda_i$ .

Ces valeurs propres  $\lambda_i$  vont nous permettre de classer les points d'équilibre et d'en connaître la stabilité. Ainsi, si  $\mathbf{J}$  ne possède pas de valeurs propres à partie réelle nulle,  $(\mathbf{x}_0, \mu_0)$  est qualifié de point d'équilibre hyperbolique. Il en existe trois types : les puits, les sources et les points selle :

- Si ses valeurs propres ont toutes des parties réelles négatives alors, toutes les composantes de  $\mathbf{y}$  décroissent et  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$  quand  $t \rightarrow \infty$ .  $\mathbf{x}_0$  est alors qualifié de puit et est asymptotiquement stable. Si  $\mathbf{J}$  possède des valeurs propres réelles,  $\mathbf{x}_0$  est également appelé nœud stable et, si  $\mathbf{J}$  possède des valeurs propres complexes alors,  $\mathbf{x}_0$  est appelé foyer stable.
- Si  $\mathbf{J}$  possède une ou plusieurs valeurs propres ayant une partie réelle positive alors, certaines composantes de  $\mathbf{y}$  augmentent quand  $t$  croît et  $\mathbf{x}$  va s'éloigner de  $\mathbf{x}_0$  qui est alors dénommé source et qui est instable. Comme précédemment, si  $\mathbf{J}$  possède des valeurs propres réelles,  $\mathbf{x}_0$  est également appelé nœud instable et, si  $\mathbf{J}$  possède des valeurs propres complexes alors,  $\mathbf{x}_0$  est appelé foyer instable.
- Si  $\mathbf{J}$  possède à la fois des valeurs propres à parties réelles positives et négatives alors,  $\mathbf{x}_0$  est un point selle qui est donc toujours instable.

Par opposition au point d'équilibre hyperbolique, si  $\mathbf{J}$  possède une ou plusieurs valeurs propres ayant une partie réelle nulle alors,  $(\mathbf{x}_0, \mu_0)$  est qualifié de point d'équilibre non hyperbolique.

- Si  $\mathbf{J}$  possède une ou plusieurs valeurs propres ayant une partie réelle strictement positive,  $(\mathbf{x}_0, \mu_0)$  est instable.
- Si  $\mathbf{J}$  possède des valeurs propres ayant des parties réelles strictement négatives, les autres étant toutes à parties réelles nulles,  $(\mathbf{x}_0, \mu_0)$  est dit neutre ou marginalement stable.
- Enfin, si  $\mathbf{J}$  ne possède que des valeurs propres imaginaires pures non nulles,  $(\mathbf{x}_0, \mu_0)$  est appelé un centre.

Les théorèmes de Hartman-Grobman [68], pour des points d'équilibre hyperboliques et, de Shoshitaishvili [68], pour des points d'équilibre non hyperboliques stipulent que la stabilité du système non linéaire 4.6 est liée à celle du système linéarisé 4.8 au point d'équilibre. Ainsi, un point d'équilibre  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$  est stable pour le système non linéaire 4.6 si  $\mathbf{y} = \mathbf{0}$  est asymptotiquement stable pour le système linéaire 4.8. De même, il est instable si  $\mathbf{y} = \mathbf{0}$  est instable. Par contre, le système linéarisé ne permet pas de déterminer la stabilité d'un point d'équilibre neutre ou d'un centre. Il faut dans ce cas une analyse non linéaire c'est-à-dire qu'il faut pousser plus loin le développement de Taylor de  $\mathbf{f}$  dans l'équation 4.7 [68]. Ainsi, selon le théorème de Hartman-Grobman, le comportement dynamique localement au voisinage du point d'équilibre hyperbolique  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$  du système non linéaire 4.6 est qualitativement similaire à celui du système linéaire 4.8 au voisinage de  $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ .

Autant une linéarisation permet, pour un point hyperbolique, de connaître sa stabilité, elle ne permet pas de connaître la région stable c'est-à-dire le domaine dans lequel les conclusions sur la stabilité sont valables. Une fonction de Lyapunov peut permettre de déterminer le bassin d'attraction des attracteurs c'est-à-dire l'ensemble des conditions initiales telles qu'au bout d'un certain temps, le système rejoindra une solution stable, qui est alors qualifiée d'attracteur. Elle permet également de déterminer la stabilité d'un point d'équilibre non hyperbolique. Si on considère toujours le système autonome 4.6,  $\mathbf{x}_0$  étant un de ses points d'équilibre, la fonction de Lyapunov  $V$  de  $\mathbf{f}$  en  $\mathbf{x}_0$  est définie par :

$$\begin{aligned} V : \mathbb{R}^N &\rightarrow \mathbb{R}, \in C^1(U) \\ \mathbf{x} &\mapsto \begin{cases} V(\mathbf{x}) > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in U, \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0 \\ V(\mathbf{x}_0) = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.11)$$

où  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^N$ . Selon le théorème de Hirsch et Smale [50], si  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^N$  contenant  $\mathbf{x}_0$  et qu'il existe une fonction de Lyapunov  $V$  de  $\mathbf{f}$  au point  $\mathbf{x}_0$  alors :

- Si  $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0, \forall \mathbf{x} \in U : \mathbf{x}_0$  est stable.
- Si  $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0, \forall \mathbf{x} \in U - \{\mathbf{x}_0\} : \mathbf{x}_0$  est asymptotiquement stable.
- Si  $\dot{V}(\mathbf{x}) > 0, \forall \mathbf{x} \in U - \{\mathbf{x}_0\} : \mathbf{x}_0$  est instable.

où  $\dot{V}(\mathbf{x})$  représente la dérivée de  $V$  le long du flot de l'équation 4.6 :  $\dot{V}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i$ . Pour de nombreux système mécaniques, la fonction de Lyapunov est l'énergie totale du système.

La perte de stabilité d'une solution peut conduire brutalement à une nouvelle dynamique totalement différente qui peut avoir des conséquences désastreuses sur le système. Ces pertes de stabilité sont dénommées bifurcations et sont répertoriées en plusieurs catégories comme nous allons le voir.

## 4.4 Bifurcations locales de points fixes

Le terme bifurcation, introduit par Poincaré [68], est utilisé pour désigner un changement qualitatif concernant les caractéristiques d'un système, tel le nombre et le type des solutions, lors de la variation d'un ou plusieurs paramètres de contrôle. Le terme bifurcation locale se rapporte quant à lui à des changements qualitatifs au voisinage d'un point fixe ou d'une solution périodique du système, tout autre changement étant alors considéré comme bifurcation globale. Les bifurcations peuvent être regroupées en deux catégories : les bifurcations « continues », si l'état du système varie continuellement avec son paramètre de contrôle ou sinon, « discontinues ». Cette dernière catégorie, encore appelée bifurcations « catastrophiques », peut elle même être subdivisée en bifurcations « dangereuses » et « explosives ». Une bifurcation dangereuse est caractérisée par la disparition soudaine de l'attracteur de la solution. Ce phénomène, connu sous le nom de « blue sky catastroph » à alors pour conséquence un saut du système vers un nouvel attracteur. Si le paramètre de contrôle varie en sens inverse, un phénomène d'hystérésis se produit. Une bifurcation explosive n'est pas, quant à elle, caractérisée par un saut de la réponse du système mais par une explosion en un attracteur plus grand, incluant l'ancien. Il s'agit d'une transformation réversible si le paramètre de contrôle varie en sens inverse. Une telle bifurcation a pour conséquence une transition intermittente vers le chaos. Dans cette partie, nous allons nous intéresser aux bifurcations ayant lieu au voisinage d'un point fixe. Le cas des solutions périodiques sera abordé ultérieurement.

Considérons donc un point fixe du système d'équations différentielles autonomes 4.6. Supposons qu'au cours de la variation de son paramètre de contrôle, ce point fixe devienne non hyperbolique. Si la réponse du système est qualitativement différente avant et après ce point, celui-ci est appelé point de bifurcation et le changement associé, bifurcation. Si la variation du paramètre de contrôle du système est réalisée à partir d'un point fixe stable, celui-ci peut alors perdre sa stabilité lors des différents types de bifurcation suivants :

- bifurcation col-nœud illustrée en figure 4.1(a).
- bifurcation transcritique illustrée en figure 4.1(b).
- bifurcation « pitchfork » ou « symmetry-breaking » illustrée en figure 4.1(c) et (d).
- bifurcation de Hopf illustrée en figure 4.2(a) et (b).

Lors des trois premiers types de bifurcation, seules des branches de solutions statiques ou de points fixes se croisent. Il sont ainsi qualifiés de bifurcations statiques. Dans le cas d'une bifurcation de Hopf, il y a croisement de branches associées à des points fixes et à des solutions périodiques. Pour cette raison, les bifurcations de Hopf sont dites bifurcations dynamiques. Les figures illustrant ces bifurcations représentent la variation des solutions de l'équation 4.6 (représentées par une grandeur judicieuse  $[\mathbf{X}]$ ) ainsi que leur stabilité en fonction du paramètre de contrôle  $\mu$  variant. Elles sont couramment appelées diagrammes de bifurcation. Dans ces diagrammes, une branche de solution stable est nommée branche stable et est représentée en trait plein. Une branche de solution instable est quant à elle nommée branche instable et est représentée en traits pointillés.

Il existe deux conditions nécessaires à l'obtention d'une bifurcation statique au point  $(\mathbf{x}_0, \mu_c)$  qui sont :

1.  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mu_c) = \mathbf{0}$ .
2.  $\mathbf{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{f}$ , qui est la jacobienne de  $\mathbf{f}$  par rapport à  $\mathbf{x}$ , possède une valeur propre à partie réelle nulle, toutes les autres ayant des parties réelles non nulles, au point  $(\mathbf{x}_0, \mu_c)$ .

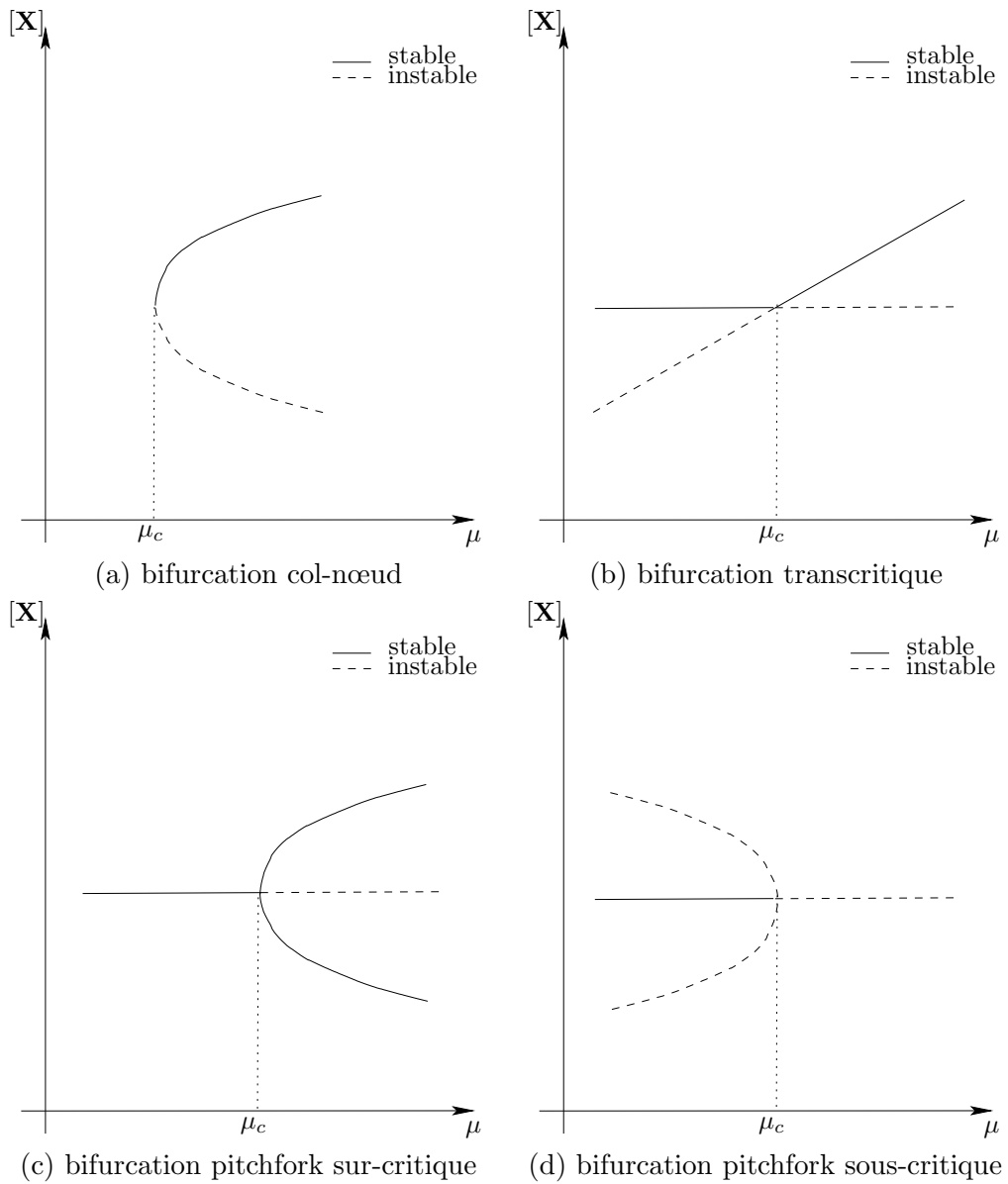


FIG. 4.1 – Bifurcations d'un point fixe

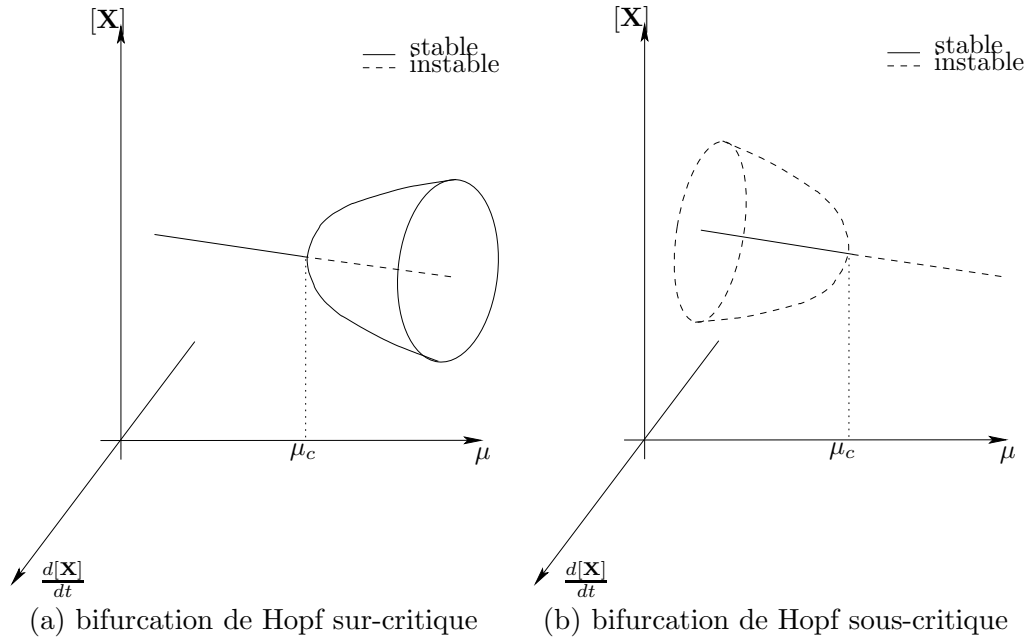


FIG. 4.2 – Bifurcations d'un point fixe - suite

La première condition assure que la solution considérée est bien un point fixe pour le système 4.6 et la deuxième, que ce point fixe est non hyperbolique. Une fois ces deux conditions vérifiées, si les éléments de  $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mu}$  ne peuvent pas être exprimés par une combinaison linéaire des éléments de  $\mathbf{D}_x \mathbf{f}$  (c'est-à-dire il n'existe pas de vecteur  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^N$  tel que  $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mu} = \mathbf{D}_x \mathbf{f} \cdot \mathbf{z}$ ) alors, il s'agit d'une bifurcation col-nœud. Si au contraire  $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mu}$  peut être exprimé à partir de  $\mathbf{D}_x \mathbf{f}$  alors, il s'agit d'une bifurcation de type « pitchfork » ou transcritique. Une autre caractéristique des bifurcations col-nœud est que les branches qui se croisent au point de bifurcation ont même tangente, comme le montre la figure 4.1(a).

Lorsqu'un paramètre de contrôle  $\mu$  varie, une bifurcation de Hopf d'un point fixe du système 4.6 intervient à  $\mu = \mu_c$  si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

1.  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mu_c) = \mathbf{0}$ .
2.  $\mathbf{D}_x \mathbf{f}$  possède une paire de valeurs propres imaginaires pures (c'est-à-dire  $\pm i\omega_h$ ), toutes les autres ayant des parties réelles non nulles, au point  $(\mathbf{x}_0, \mu_c)$ .
3. Pour  $\mu \approx \mu_c$ , si  $\hat{\lambda} \pm i\omega_h$  désigne la paire de valeurs propres imaginaires ayant une partie réelle nulle à  $\mu = \mu_c$ , il faut  $\frac{d\hat{\lambda}}{d\mu_c} \neq 0$  à  $\mu = \mu_c$ .

Comme précédemment, les deux premières conditions assurent que le point fixe subissant la bifurcation est bien un point fixe non hyperbolique alors que la dernière implique une condition de croisement transversal (c'est-à-dire à vitesse non nulle) de l'axe imaginaire. Cette condition est d'ailleurs nommée condition de transversalité. Si ces conditions sont satisfaites alors, une solution périodique de période  $2\pi/\omega_h$  prend naissance au point  $(\mathbf{x}_0, \mu_c)$ .

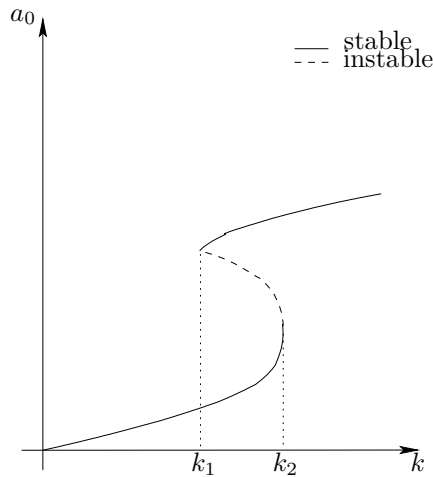


FIG. 4.3 – Bifurcation catastrophique dangereuse

Pour terminer ce paragraphe concernant les bifurcations de points fixes, la figure 4.3 illustre une bifurcation discontinue ou catastrophique, dangereuse. Elle représente l'amplitude de la réponse forcée d'un oscillateur Duffing [69] en fonction de la force d'excitation. On voit ainsi qu'elle présente des sauts d'amplitude en  $k_1$  et  $k_2$ , de même qu'un phénomène d'hystérésis en ces points, en fonction du sens de variation de  $k$ .

## 4.5 Stabilité locale des solutions périodiques

Comme il l'a été évoqué plusieurs fois, les systèmes non linéaires présentent souvent des comportements dynamiques de type périodique. Il est donc important d'accorder une attention particulière à l'étude des solutions périodiques et, à leur stabilité. Contrairement aux points fixes, une solution périodique est caractérisée par un état dépendant du temps.

Une solution  $\mathbf{x}(t)$  du système autonome 4.6 est périodique de période minimale  $T$  si :

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t+T) = \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(t+T) \neq \mathbf{x}(t), \text{ pour } 0 < t < T \end{cases} \quad (4.12)$$

Cette solution est appelée cycle limite s'il n'y a pas d'autres solutions périodiques proches d'elle. En d'autres termes, un cycle limite est une solution périodique isolée et correspond à une orbite fermée isolée dans l'espace d'état. Toute trajectoire initiée au voisinage d'un cycle approche ce dernier quand  $t \rightarrow +\infty$  ou  $t \rightarrow -\infty$ . Un cycle limite est dit instable si toutes les orbites initiées dans un de ses voisinages s'en éloignent quand  $t \rightarrow +\infty$ . Il est dit stable dans le cas contraire.

Nous avons vu en section 4.2 qu'une solution périodique pouvait être stable au sens de Poincaré et instable au sens de Lyapunov. Cependant, ceci ne fournit pas une procédure capable de déterminer la stabilité d'une solution périodique. Une telle procédure peut être



obtenue en se basant sur la théorie de Floquet ou sur les applications de Poincaré.

#### 4.5.0.1 Théorie de Floquet

Soit  $\mathbf{x}_0(t)$  une solution périodique du système 4.6, en  $\mu = \mu_0$  et, de période minimale  $T$ . Considérons une perturbation  $\mathbf{y}$  de sorte que :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0(t) + \mathbf{y}(t) \quad (4.13)$$

En injectant l'équation 4.13 dans l'équation 4.6 puis, en faisant un développement en série de Taylor de  $\mathbf{f}$  au voisinage de  $\mathbf{x}_0$ , il vient, en ne conservant que les termes linéaires en  $\mathbf{y}$  :

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mu_0) \cdot \mathbf{y} + O(\|\mathbf{y}\|^2) \quad \text{soit} \quad \dot{\mathbf{y}} \approx \mathbf{A}(t, \mu_0) \cdot \mathbf{y} \quad (4.14)$$

Le système 4.6 ayant été linéarisé en  $\mathbf{y}$ , l'étude de stabilité sera locale. Ici, la matrice jacobienne de  $\mathbf{f}$  par rapport à  $\mathbf{x}$  c'est-à-dire  $\mathbf{A}$  dépend du temps. Elle est elle aussi périodique de période  $T$  mais, il se peut que ce ne soit pas sa période minimale. La théorie de Floquet traite des systèmes linéaires tels ceux définis par l'équation 4.14, à coefficients périodiques.

Le système linéaire 4.14, de  $N$  équations, admet  $N$  solutions linéairement indépendantes  $\mathbf{y}_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Ces solutions sont appelées solutions fondamentales et peuvent être regroupées dans une matrice de dimensions  $N \times N$  nommée matrice fondamentale solution :

$$\mathbf{Y}(t) = [\mathbf{y}_1(t), \dots, \mathbf{y}_N(t)] \quad (4.15)$$

$\mathbf{Y}$  vérifie trivialement l'équation :

$$\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{A}(t, \mu_0) \cdot \mathbf{Y} \quad (4.16)$$

On peut montrer que  $\mathbf{Y}(t+T)$  est également une matrice fondamentale solution. Or, puisque le système 4.14 admet au plus  $N$  solutions linéairement indépendantes et que les  $\mathbf{y}_i$  sont  $N$  solutions linéairement indépendantes alors, les  $\mathbf{y}_i(t+T)$  doivent être des combinaisons linéaires de  $\mathbf{y}_1(t), \dots, \mathbf{y}_N(t)$ , ce qui peut s'écrire :

$$\mathbf{Y}(t+T) = \mathbf{Y}(t) \cdot \Phi \quad (4.17)$$

où  $\Phi$  est une matrice constante de dimensions  $N \times N$  dépendant de la matrice fondamentale solution choisie. Cette matrice n'est pas unique. Elle peut être interprétée comme une transformation entre un vecteur initial de  $\mathbb{R}^N$  à  $t = 0$  à un autre vecteur de  $\mathbb{R}^N$  à  $t = T$ . Compte-tenu de la définition de  $\mathbf{y}$ , les conditions initiales sont :

$$\mathbf{Y}(0) = \mathbf{I} \quad (4.18)$$

$\mathbf{I}$  étant la matrice identité. Il vient alors d'après l'équation 4.17 :

$$\Phi = \mathbf{Y}(T) \quad (4.19)$$

La matrice  $\Phi$  définie par les équations 4.17, 4.18 et 4.19 est appelée matrice monodrome. On peut remarquer, à ce stade, que la matrice  $\mathbf{\Gamma}(T_0, \eta_0)$  calculée lors de la méthode de shooting (Cf. équations 3.21, 3.24, 3.25) est la matrice monodrome du système dont la solution

périodique est recherchée.

Nous allons montrer comment les valeurs propres de la matrice monodrome peuvent nous permettre de statuer sur la stabilité de la solution périodique  $\mathbf{x}_0(t)$ . Tout d'abord, introduisons le changement de variable  $\mathbf{Y}(t) = \mathbf{V}(t) \cdot \mathbf{P}^{-1}$  où  $\mathbf{P}$  est une matrice inversible, de telle sorte que la relation 4.17 puisse s'écrire :

$$\mathbf{V}(t+T) = \mathbf{V}(t) \cdot \mathbf{J} \quad (4.20)$$

avec

$$\mathbf{J} = \mathbf{P}^{-1} \cdot \Phi \cdot \mathbf{P} \quad (4.21)$$

$\mathbf{P}$  est choisie de telle sorte que  $\mathbf{J}$  ait la forme la plus simple possible. Celle-ci dépend des valeurs propres et des vecteurs propres de  $\Phi$ .

Comme dans le cas étudié en section 4.3, si les valeurs propres  $\rho_m$  de  $\Phi$  sont distinctes alors,  $\mathbf{P}$  peut être choisie telle que ses colonnes soient les vecteurs propres à droite  $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N$  de  $\Phi$  associés aux valeurs propres  $\rho_1, \dots, \rho_N$  :

$$\Phi \cdot \mathbf{p}_m = \rho_m \mathbf{p}_m \quad (4.22)$$

Dans ce cas,  $\mathbf{J}$  est une matrice diagonale dont les éléments sont les valeurs propres  $\rho_1, \dots, \rho_N$  de  $\Phi$ . Si ces valeurs propres sont complexes, les vecteurs propres associés le sont aussi. Dans le cas où les valeurs propres de  $\Phi$  ne sont pas distinctes alors,  $\mathbf{P}$  est constitué des vecteurs propres généralisés de  $\Phi$  et,  $\mathbf{J}$  peut être diagonale ou non.

Les valeurs propres  $\rho_m$  de  $\Phi$  sont appelées multiplicateurs caractéristiques de Floquet. Il existe un unique jeu de multiplicateurs caractéristiques associé à la matrice  $\mathbf{A}$  (Cf. équation 4.14) c'est-à-dire à la jacobienne de  $\mathbf{f}$  par rapport à  $\mathbf{x}$ . Chaque  $\rho_m$  donne une information sur la convergence ou la divergence locale de l'orbite dans une direction particulière au cours d'une période de celle-ci.

Si les multiplicateurs de Floquet sont tous distincts alors, l'équation 4.20 peut s'écrire, pour chacun de ses composants :

$$\mathbf{v}_m(t+T) = \rho_m \mathbf{v}_m(t) \quad \text{avec } m \in [1, \dots, N] \quad (4.23)$$

Par extension, on peut écrire :

$$\mathbf{v}_m(t+NT) = \rho_m^N \mathbf{v}_m(t) \quad (4.24)$$

$N$  étant un entier. On en déduit ainsi que, lorsque  $t \rightarrow \infty$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_m(t) &\rightarrow \mathbf{0} \quad \text{si } \|\rho_m\| < 1 \\ \mathbf{v}_m(t) &\rightarrow \infty \quad \text{si } \|\rho_m\| > 1 \end{aligned} \quad (4.25)$$

Quand  $\rho_m = 1$ ,  $\mathbf{v}_m(t)$  est périodique de période  $T$  et, lorsque  $\rho_m = -1$ ,  $\mathbf{v}_m(t)$  est périodique de période  $2T$ . Une généralisation au cas où les multiplicateurs de Floquet ne sont pas tous

distincts est faite dans [69].

Il est important de noter qu'un des multiplicateurs de Floquet associé à une solution périodique  $\mathbf{x}_0(t)$  d'un système autonome est toujours égal à 1.

Ainsi, une solution périodique du système 4.6 est dite solution périodique hyperbolique si un des multiplicateurs de Floquet est situé sur le cercle unité dans le plan complexe. Cette solution peut être stable ou instable. On déduit de l'équation 4.24 que cette solution périodique hyperbolique est asymptotiquement stable s'il n'y a aucun multiplicateur de Floquet à l'extérieur du cercle unité. Celle-ci est appelée cycle limite stable ou encore attracteur périodique. Une solution périodique hyperbolique est dite instable si au moins un multiplicateur de Floquet est en dehors du cercle unité. Si ils le sont tous (excepté celui se trouvant sur le cercle même) alors la solution est dite cycle limite instable ou, répulseur périodique et, s'il existe des multiplicateurs à l'intérieur du cercle unité, elle est dite cycle limite instable de type selle.

Si au moins deux multiplicateurs de Floquet se trouvent sur le cercle unité, la solution est dite solution périodique non hyperbolique. Celle-ci est instable si un ou plusieurs multiplicateurs se trouvent en dehors du cercle unité. Si aucun d'entre eux ne se trouvent à l'extérieur du cercle unité, une analyse non linéaire est nécessaire pour statuer sur la stabilité de cette solution c'est-à-dire qu'il faut effectuer un développement plus élevé de  $\mathbf{f}$  dans l'équation 4.14.

Ainsi, grâce à la théorie de Floquet, l'étude de la stabilité d'une solution périodique se résume au calcul des valeurs propres d'une matrice : la matrice monodrome. Un lien plus flagrant avec l'étude de la stabilité d'un point d'équilibre peut être montré en introduisant les exposants caractéristiques de Floquet  $\gamma_m$  définis par :

$$\rho_m = e^{\gamma_m T} \quad (4.26)$$

On peut alors montrer, en multipliant l'équation 4.23 par  $e^{-\gamma_m(t+T)}$  que les composants de  $\mathbf{V}(t)$  s'expriment, si  $\rho_m \neq 0$ , par :

$$\mathbf{v}_m(t) = e^{\gamma_m t} \Phi_m(t) \quad (4.27)$$

Ainsi, on en déduit qu'une solution périodique est stable si tous les exposants caractéristiques ont une partie réelle négative et instable s'il existe au moins un exposant ayant une partie réelle positive. Comme dans le cas de points d'équilibre, la partie réelle des exposants mesure la croissance ou la décroissance exponentielle de la partie transitoire d'une perturbation alors que leurs parties imaginaires correspondent, modulo  $2\pi/T$ , à la fréquence de cette perturbation.

Pour terminer, le cas d'un système non autonome peut être traité de la même façon, si ce n'est que la condition, pour une solution périodique, d'avoir toujours un multiplicateur sur le cercle unité n'est plus vraie. Ainsi, si aucune valeur propre de  $\Phi$  n'est sur le cercle unité, la solution périodique est dite hyperbolique. Dans le cas contraire, elle est dite non hyperbolique. Si  $\Phi$  possède toutes ses valeurs propres à l'intérieur du cercle unité, la solution périodique est asymptotiquement stable (elle est dite cycle limite stable ou attracteur périodique comme précédemment). Elle est instable si au moins une des valeurs propres de  $\Phi$  est à l'extérieur

du cercle unité. Si elles le sont toutes, la solution est nommée répulseur périodique. Si seules certaines d'entre elles se trouvent à l'extérieur alors, la solution est de type selle. Enfin, si aucune des valeurs propres de  $\Phi$  n'est à l'extérieur du cercle unité mais qu'il s'agit d'une solution périodique non hyperbolique, il faut comme dans le cas d'un système autonome avoir recours à une analyse non linéaire.

#### 4.5.0.2 Applications de Poincaré

Avant de voir comment une application de Poincaré peut permettre de déterminer la stabilité d'une solution périodique, définissons une section de Poincaré. Il s'agit d'une hyper surface, dans l'espace d'état, transverse au flot d'un système d'équations. On rappelle que le flot du problème à valeur initiale  $\dot{x} = f(x), x(t_0) = x_0$  où  $f \in \Omega \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  de classe  $C^1$ , est l'application :

$$\begin{aligned} \phi_t : W &\rightarrow \Omega \\ (t, x_0) &\mapsto \phi_t(x_0) = \phi(t, x_0) \end{aligned} \quad (4.28)$$

où,  $\phi(t, x_0)$  est la solution du problème à valeur initiale précédent, définie sur l'intervalle de temps maximal  $J(x_0) \subset \mathbb{R}$  et  $W = \{(t, x_0) \in \mathbb{R} \times \Omega, t \in J(x_0)\}$ . Ainsi, dans le cas du système autonome 4.6, la section est transverse au flot si :  $\mathbf{n}^T(\mathbf{x}) \cdot \phi_t(\mathbf{x}) \neq 0$ , où  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$  désigne un vecteur normal à la section située au point  $\mathbf{x}$  et  $\phi_t(\mathbf{x})$ , le flot de l'équation 4.6. Dans le cas d'un système non autonome comme celui désigné par l'équation 4.1, cette condition s'écrit :  $\mathbf{n}^T(\mathbf{x}(t)) \cdot \phi_t(t, \mathbf{x}) \neq 0$ .

Soit  $\mathbf{x}_m$  l'intersection d'une trajectoire d'un système autonome avec une section de Poincaré. Si ce système est de dimension  $N$  alors la section est une surface de dimension  $N - 1$  et chaque point  $\mathbf{x}_m$  est défini par  $N - 1$  coordonnées. L'application qui lie l'intersection courante à l'intersection ultérieure est nommée application de Poincaré  $\mathbf{P}$  :

$$\mathbf{x}_{m+1} = \mathbf{P}(\mathbf{x}_m), \quad m \in \mathbb{Z} \quad (4.29)$$

Cette application est inversible et conserve les propriétés du flot décrit par le système associé. Il s'agit donc d'un difféomorphisme conservant l'orientation. Cette propriété implique que la matrice jacobienne d'une application de Poincaré est toujours positive. On peut faire la remarque que dans le cas d'un système de  $N$  équations non autonomes, la section de Poincaré associée est de dimensions  $N$ . Il en est de même pour l'application de Poincaré.

Nous allons montrer comment l'étude de stabilité d'une solution périodique peut se résumer à l'étude de stabilité d'un point fixe pour une application de Poincaré. Considérons deux sections de Poincaré intersectant deux orbites de systèmes autonomes comme illustrées par les figures 4.4. L'orbite de la figure 4.4(a) intersecte l'hyper surface  $\Sigma$  en un point  $\mathbf{x}_{eq}$  avant de se refermer sur elle même alors que celle de la figure 4.4(b) l'intersecte en deux points avant elle aussi de se refermer sur elle même. L'orbite de la figure 4.4(a) est donc réduite à un point sur la section de Poincaré choisie et, celle de la figure 4.4(b), à deux points. Dans le cas de la

figure 4.4(a), le point  $\mathbf{x}_{eq}$  est un point fixe pour l'application de Poincaré :

$$\mathbf{x}_{eq} = \mathbf{P}(\mathbf{x}_{eq}) \quad (4.30)$$

Dans le cas de la figure 4.4(b), chaque point de la section est un point de période double pour l'application de Poincaré associée et, un point fixe pour l'application  $\mathbf{P}^2$ . Ainsi, d'une façon générale, une orbite périodique d'un système continu peut intersecter  $k$  fois une section de Poincaré avant de se refermer sur elle. Si  $\mathbf{x}_{eq}$  est l'une de ces intersections, l'application de Poincaré est telle que :

$$\mathbf{x}_{eq} = \mathbf{P}^k(\mathbf{x}_{eq}) \quad (4.31)$$

impliquant ainsi que  $\mathbf{x}_{eq}$  est un point fixe pour l'application de Poincaré  $\mathbf{P}^k$ . En regardant la figure 4.4, on peut très bien imaginer construire une section de Poincaré intersectant les orbites en un autre point. Cependant, on montre que les sections de Poincaré associées à une orbite possèdent le même nombre de points fixes et que ceux-ci ont la même stabilité [60]. Ainsi, cela ne changera en rien l'étude de stabilité d'une solution périodique.

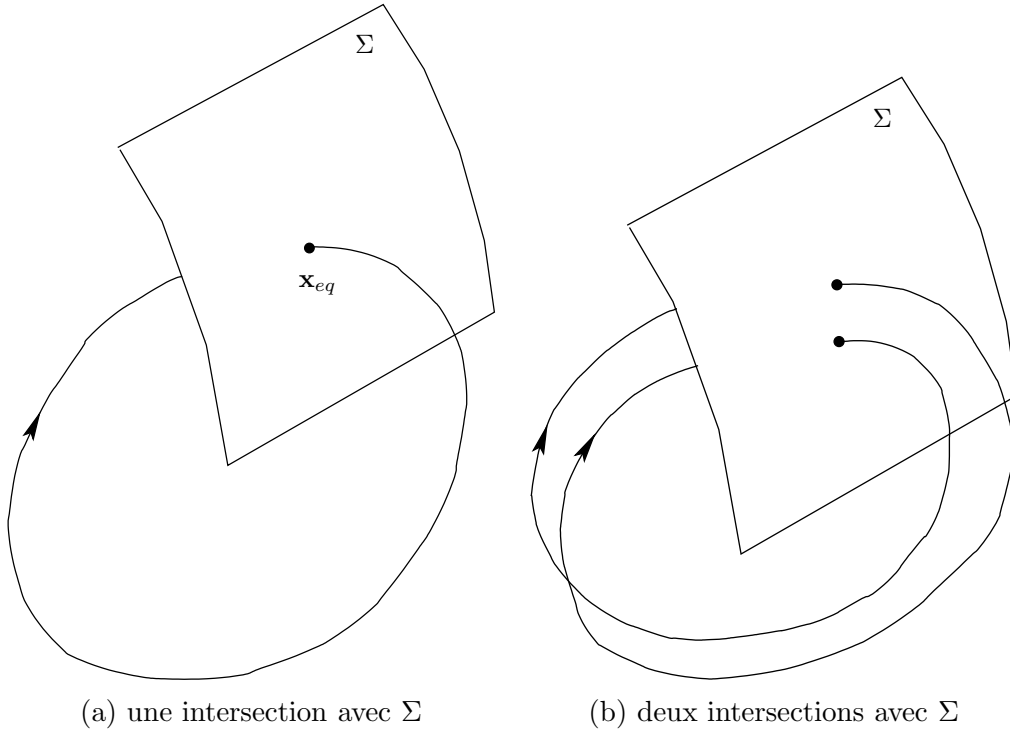


FIG. 4.4 – Sections de Poincaré d'orbites périodiques

Dans le cas d'un système d'équations différentielles non autonomes tel le système 4.1, la période associée à l'orbite périodique est généralement connue explicitement. Considérons donc une solution périodique de période  $T$  et notons  $\mathbf{x}_0 = \eta_0$  un point de cette orbite périodique. Une trajectoire initiée à partir de  $\eta_0$  à  $t = t_0$  est donc représentée par  $\mathbf{x}(\eta_0, t, t_0)$ . Pour construire une section de Poincaré, il suffit de collecter des points à des instants séparés d'une période  $T$ .

Donc, si  $\eta$  désigne un point de cette section, l'application de Poincaré est définie par :

$$\mathbf{P}(\eta) = \mathbf{x}(\eta, t_0 + T, t_0) \quad (4.32)$$

Par définition de  $\eta_0$ , on a :

$$\mathbf{x}(\eta_0, t_0 + T, t_0) = \eta_0 \quad (4.33)$$

d'où :

$$\mathbf{P}(\eta_0) = \eta_0 \quad (4.34)$$

Ainsi, l'orbite périodique du système d'équations différentielles non autonomes 4.1 de période  $T$  correspond à un point fixe pour l'application de Poincaré  $\mathbf{P}(\eta)$ . On peut alors réaliser un développement limité de cette application au voisinage de  $\eta_0$ . On a alors :

$$\mathbf{P}(\eta_0 + \mathbf{v}) = \mathbf{P}(\eta_0) + \mathbf{D}_\eta \mathbf{P}(\eta_0) \cdot \mathbf{v} + 0 \left( \|\mathbf{v}\|^2 \right) \quad (4.35)$$

où  $\|\mathbf{v}\|^2$  est la norme d'une déviation à partir du point fixe sur la section de Poincaré. A partir de là, la stabilité de ce point fixe  $\eta_0$  pourra être déduite à partir des valeurs propres de la matrice jacobienne de  $\mathbf{P}$  par rapport à  $\eta$  en  $\eta_0$  :  $\mathbf{D}_\eta \mathbf{P}(\eta_0)$ . Il n'est généralement pas possible d'obtenir cette matrice de façon analytique, sauf dans des cas très simples. Cependant, en différenciant le système d'équations différentielles 4.1 par rapport à  $\eta$ , il vient l'équation :

$$\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{D}_\mathbf{x} \mathbf{f} \cdot \mathbf{Y} \quad \text{avec} \quad \mathbf{Y} = \mathbf{D}_\eta \mathbf{x} \quad (4.36)$$

Ainsi, en intégrant cette équation différentielle, grâce par exemple à un intégrateur numérique comme nous l'avons vu en section 3.1.1, entre  $t_0$  et  $t_0 + T$ , à partir de la condition initiale  $\mathbf{Y}(t_0) = \mathbf{I}$ , nous obtenons  $\mathbf{Y}(t_0 + T)$  qui n'est autre que  $\mathbf{D}_\eta \mathbf{P}(\eta_0)$  d'après l'équation 4.32. Il est alors possible de statuer sur la stabilité du point fixe. Si  $\mathbf{D}_\eta \mathbf{P}(\eta_0)$  ne possède aucune valeur propre sur le cercle unité, le point fixe est hyperbolique et la solution périodique correspondante est également dite hyperbolique. Dans ce cas, si toutes les valeurs propres de  $\mathbf{D}_\eta \mathbf{P}(\eta_0)$  sont dans le cercle unité, le point fixe de  $\mathbf{P}$  est asymptotiquement stable et il en est de même pour l'orbite périodique associée qui est alors un cycle limite attracteur. Si au contraire  $\mathbf{D}_\eta \mathbf{P}(\eta_0)$  possède toutes ses valeurs propres à l'extérieur du cercle unité alors, le point fixe de  $\mathbf{P}$  est instable. L'orbite périodique associée est également instable. Enfin, si  $\mathbf{D}_\eta \mathbf{P}(\eta_0)$  possède à la fois des valeurs propres à l'intérieur et à l'extérieur du cercle unité, le point fixe est un point selle. L'orbite correspondante est donc un cycle limite instable de type selle. Comme précédemment, si  $\mathbf{D}_\eta \mathbf{P}(\eta_0)$  possède au moins une valeur propre sur le cercle unité alors le point fixe est dit non hyperbolique, de même que l'orbite associée et il est nécessaire de faire une analyse non linéaire pour statuer sur sa stabilité.

Pour terminer, considérons le cas d'un système d'équations différentielles autonomes tel le, système 4.6. Dans ce cas, il faut noter que la période associée à une orbite périodique n'est généralement pas connue explicitement. Intéressons nous à une orbite périodique  $\Gamma$  de période au minimum égale à  $T$  :  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \eta)$ , initiée au point  $\mathbf{x} = \eta$  à l'instant  $t = 0$ . Construisons ensuite un hyperplan coupant transversalement  $\Gamma$  en  $\mathbf{x} = \eta$  et notons  $\zeta$ , l'intersection entre

cette section et l'orbite. Une trajectoire initiée à  $t = 0$  en  $\zeta$ , dans un voisinage de  $\eta$ , recoupe l'hyperplan après un temps  $\tau(\zeta)$  en  $\tilde{\zeta}$  avec :

$$\tilde{\zeta} = \mathbf{P}(\zeta) = \mathbf{x}(\tau(\zeta), \zeta) \quad (4.37)$$

Il est clair, comme le montre la figure 4.5 que  $\eta$  est un point fixe de  $\mathbf{P}$  dont la stabilité reflète celle de l'orbite  $\Gamma$  initiée à  $\eta$ . La stabilité de ce point fixe va, quant à elle, dépendre des valeurs propres de la matrice jacobienne de  $\mathbf{P}$  par rapport à  $\zeta$  au point  $\eta$  :  $\mathbf{D}_{\zeta}\mathbf{P}(\eta)$ . Cependant, l'évaluation de cette jacobienne n'est pas immédiate quelle que soit la section de Poincaré considérée. Quelques éléments sur une façon de procéder pour évaluer cette dernière et par extension ses valeurs propres sont fournis dans [68]. Comme précédemment, la stabilité de l'orbite périodique va dépendre de la position de ces valeurs propres par rapport au cercle unité.

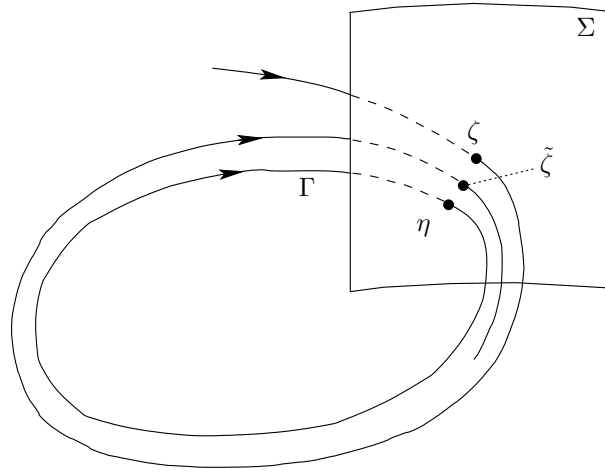


FIG. 4.5 – Section de Poincaré d'une orbite  $\Gamma$  et une trajectoire adjacente

## 4.6 Bifurcations locales de solutions périodiques

Comme dans le cas des points fixes, les solutions périodiques peuvent gagner ou perdre leur stabilité lorsqu'un ou plusieurs de leurs paramètres de contrôle varient. Ces points où elles deviennent non hyperboliques sont également appelés points de bifurcation. Les bifurcations, c'est-à-dire les phénomènes accompagnant les changements significatifs de comportement avant et après les points de bifurcation, nécessitant la variation de  $m$  paramètres sont appelées bifurcations de co-dimension  $m$ . Dans ce qui suit, seules les bifurcations de co-dimension 1 seront étudiées.

La perte de stabilité d'une solution périodique provient de la sortie du cercle unité d'un multiplicateur de Floquet. Cette sortie pouvant se faire de trois façons différentes, trois scénarios de bifurcation locale existent et sont illustrés par la figure 4.6. Tout d'abord, un multiplicateur peut quitter le cercle unité par  $+1$  (Cf. figure 4.6(a)). Dans ce cas, les bifurcations qui

en découlent sont de type « symmetry-breaking » ou « cyclic-fold » ou encore transcritique. Il peut également sortir du cercle par  $-1$  engendrant alors des bifurcations de type « period doubling » (Cf. figure 4.6(b)). Enfin, deux multiplicateurs de Floquet complexes conjugués peuvent sortir du cercle unité et donner ainsi naissance à une bifurcation de Neimark dite encore seconde bifurcation de Hopf (Cf. figure 4.6(c)).

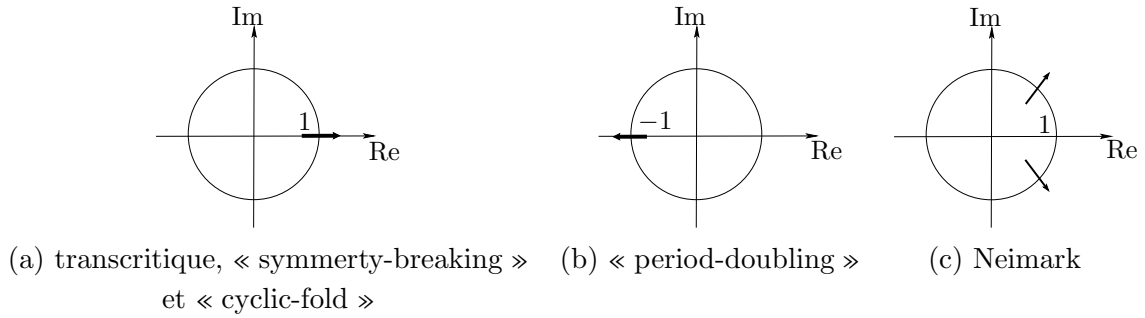


FIG. 4.6 – Scénarios selon lesquels les multiplicateurs de Floquet peuvent quitter le cercle unité engendrant différentes bifurcations locales

On peut noter que s’il est possible de construire une application de Poincaré associée à une solution périodique alors, la bifurcation locale de cette solution peut être étudiée au travers de celle du point fixe de l’application. Comme dans le cas des points fixes, les bifurcations locales de solutions périodiques sont regroupées en bifurcations continues et discontinues dites encore catastrophiques. Les caractéristiques générales des trois scénarios présentés précédemment vont maintenant être développées.

Si un multiplicateur de Floquet quitte le cercle unité en passant par  $+1$ , la bifurcation qui en résulte va dépendre de la nature de la solution périodique avant celle-ci. Supposons que cette solution périodique possède des propriétés de symétrie et qu’elle les perdent après la bifurcation. Ce phénomène est qualifié de « symmetry-breaking bifurcation ». Les scénarios sur-critiques et sous-critiques sont représentés en figure 4.7 sur lesquelles  $[\mathbf{X}]$  représente l’amplitude de la solution périodique, en fonction de la variation d’un paramètre de contrôle  $\mu$ . A chaque point de bifurcation les branches associées à la solution symétrique et à la solution dissymétrique se touchent. On peut noter qu’une bifurcation sur-critique est une bifurcation de type continu alors qu’une bifurcation sous-critique est de type discontinu.

Un exemple de bifurcation « cyclic-fold » est représenté en figure 4.8. Une branche de solution périodique stable et une branche de solution périodique instable coalescent au point de bifurcation  $\mu_c$ . On peut ainsi remarquer qu’il n’existe plus de solution périodique stable pour  $\mu > \mu_c$ . Il s’agit donc d’une bifurcation de type discontinu. Ainsi pour  $\mu > \mu_c$ , le comportement du système ne peut pas être déterminé par une analyse locale. Souvent il est nécessaire d’effectuer des simulations numériques. Il existe deux possibilités. Il se peut tout d’abord que le système soit attiré vers une solution distante bornée ou non. Dans le cas d’une solution bornée, il peut s’agir d’un attracteur ponctuel ou d’un attracteur périodique ou encore d’un attracteur apériodique. Il s’agit dans ce cas d’une bifurcation dangereuse. La deuxième possibilité



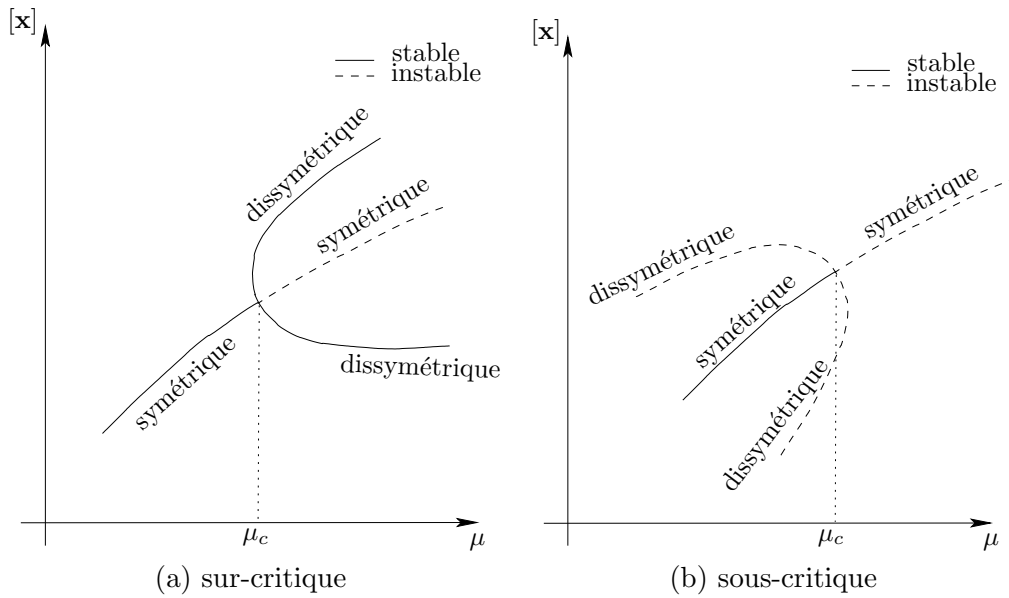


FIG. 4.7 – Bifurcations de type « symmetry-breaking »

consiste en une bifurcation explosive. L'ancien attracteur se transforme un nouvel attracteur plus grand englobant ce dernier alors appelé cycle limite fantôme. Enfin il se peut que le nouvel attracteur soit chaotique.

La figure 4.9 représente deux exemples de bifurcations transcritiques. Dans ce cas, les branches de solutions périodiques stable et instable existant avant la bifurcation, se prolongent en des branches de solutions périodiques instable et stable respectivement. Ainsi, un échange de stabilité s'opère lors d'une bifurcation transcritique.

Lorsque qu'un multiplicateur de Floquet quitte le cercle unité par  $-1$ , il se produit une bifurcation de type « period-doubling ». La branche de solution périodique stable existant avant celle-ci se prolonge alors en une branche de solution périodique instable. Il y a création d'une branche de solution périodique de période double stable après une bifurcation sur-critique et au contraire, destruction d'une branche de solution périodique de période double instable après une bifurcation sous-critique. Après une bifurcation sous-critique, il est généralement nécessaire d'effectuer des études numériques afin de déterminer le comportement du système. Pour  $\mu > \mu_c$ , il existe deux scénarios possibles qui sont les mêmes que dans le cas d'une bifurcation « cyclic-fold » c'est-à-dire attraction vers une solution distante ou explosion en un nouvel attracteur.

Enfin, considérons le cas où deux multiplicateurs de Floquet complexes conjugués quittent le cercle unité. Nous avons vu qu'une bifurcation de Hopf d'un point fixe donnait naissance à une solution périodique. Il s'agit donc de l'apparition d'une nouvelle fréquence de réponse en plus de la première. Dans le cas d'une bifurcation de Hopf d'une solution périodique, appelée alors seconde bifurcation de Hopf, le phénomène est le même. Ainsi, la solution après bifurcation peut être soit périodique, soit quasi périodique contenant deux fréquences, dépendant

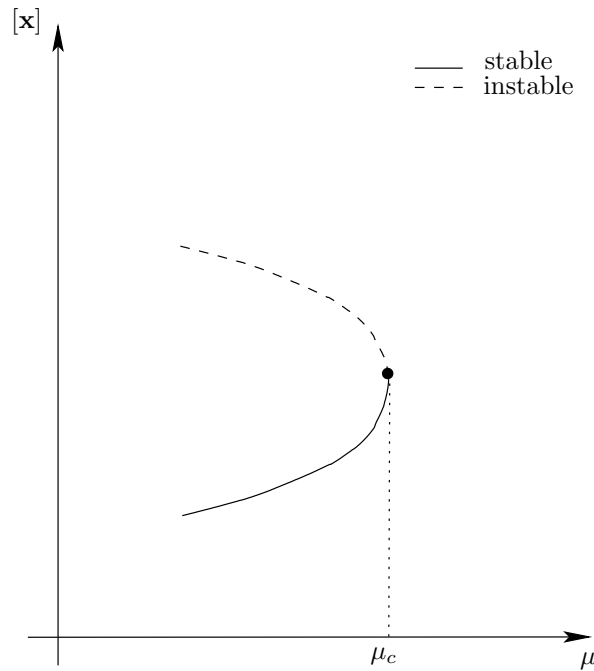


FIG. 4.8 – Bifurcation de type « cyclic-fold »

de la relation entre la nouvelle fréquence introduite et l'ancienne. Comme dans le cas d'une bifurcation de Hopf d'un point fixe, il existe des bifurcations de Neimark sur et sous-critiques. Dans les deux cas, la branche de solution périodique stable existant avant la bifurcation se prolonge en une branche de solution périodique instable après. Une branche de solution quasi-périodique stable est créée si la bifurcation est sur-critique alors qu'une branche de solution quasi-périodique instable est détruite s'il s'agit d'une bifurcation sous-critique. La bifurcation secondaire de Hopf sur-critique est une type de bifurcation continue alors que la bifurcation sous-critique est de type catastrophique. Dans ce cas, il existe comme précédemment deux scénarios possibles après une telle bifurcation. Le système peut ainsi être attiré par un attracteur éloigné borné ou non, de type ponctuel, périodique, quasi-périodique ou chaotique. Une fois de plus, cette bifurcation est dangereuse et, elle est généralement accompagnée de phénomène d'hystérésis. Dans le second scénario, le système peut exploser en un nouvel attracteur plus large.

## 4.7 Etude de stabilité locale dans le domaine fréquentiel

Comme nous l'avons précisé, les méthodes fréquentielles ont l'avantage d'être plus rapides que les méthodes temporelles pour déterminer des solutions périodiques. Cependant, puisque, dans le cas de la balance harmonique par exemple, la solution est directement recherchée comme étant périodique, il se peut que la solution obtenue vérifie l'équation d'équilibre 3.32 mais ne soit pas stable. Il convient donc de vérifier sa stabilité. Mais, afin de ne pas perdre le gain de temps lié à l'utilisation d'une méthode fréquentielle, une méthode d'étude de stabilité de solutions périodiques dans le domaine fréquentiel peut être employée. Un exemple de mise

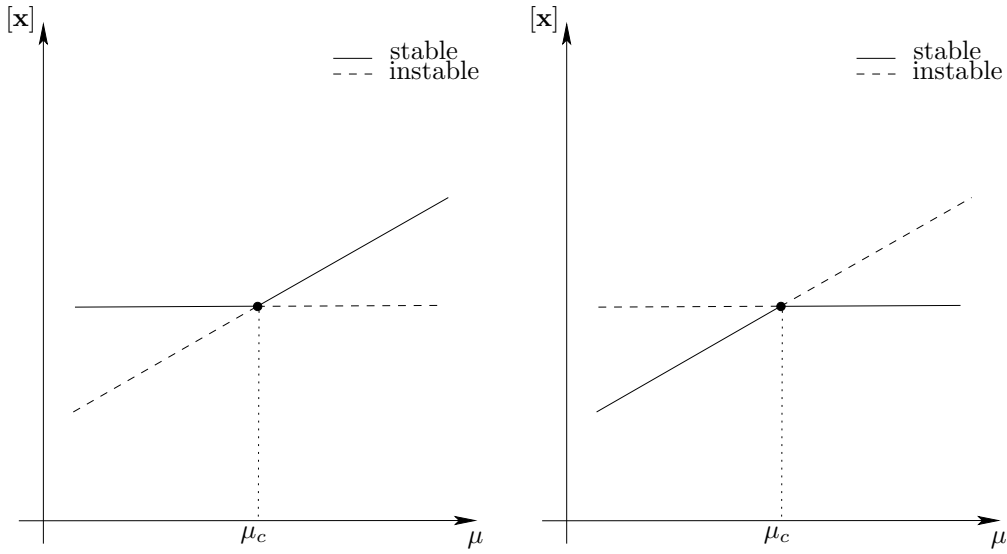


FIG. 4.9 – Deux possibilités de bifurcations transcritiques

en œuvre est détaillé dans [91] et [81].

Supposons donc que nous ayons une solution périodique  $\mathbf{q}^*(t)$  qui vérifie l'équation 3.1 du mouvement du système considéré, dans laquelle sont dissociées les forces linéaires et les forces non linéaires :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \tilde{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{q}}(t) + \tilde{\mathbf{K}}\mathbf{q}(t) + \mathbf{F}_{NL}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{F}(t) \quad (4.38)$$

Cette solution équilibre également l'équation 3.32 qui n'est autre que l'équation précédente 4.38 écrite dans le domaine fréquentiel, et qui peut s'écrire comme suit, si on dissocie la composante linéaire de  $\mathbf{b}$  et sa composante non linéaire (Cf. équations 3.32 et 3.34) :

$$\mathbf{A}.\mathbf{X} + \mathbf{b}_{NL}(\mathbf{X}) = \mathbf{b}_L \quad (4.39)$$

Considérons alors une perturbation  $\tilde{\mathbf{q}}(t)$  de notre solution périodique, qui soit elle même périodique mais pondérée par un terme exponentiel de sorte que l'on ait :

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}^*(t) + \tilde{\mathbf{q}}(t) e^{\lambda t} \quad (4.40)$$

Cette équation, une fois injectée dans l'équation du mouvement 4.38 donne :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}^*(t) + \tilde{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{q}}^*(t) + \tilde{\mathbf{K}}\mathbf{q}^*(t) \\ + e^{\lambda t} \left[ \mathbf{M}\ddot{\tilde{\mathbf{q}}}(t) + \tilde{\mathbf{C}}\dot{\tilde{\mathbf{q}}}(t) + \tilde{\mathbf{K}}\tilde{\mathbf{q}}(t) \right] + e^{\lambda t} \left[ \mathbf{M} \left( 2\lambda\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \lambda^2\tilde{\mathbf{q}} \right) + \tilde{\mathbf{C}}\lambda\tilde{\mathbf{q}} \right] \\ + \mathbf{F}_{NL}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{F}(t) \end{aligned} \quad (4.41)$$

En développant en série de Fourier tronquées ces solutions périodiques (Cf. équation 3.27) puis en projetant l'équation précédente sur les vecteurs de la base de Fourier (Cf. équation 3.31),

il vient l'équation suivante :

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X}^* + \mathbf{b}_{NL}(\mathbf{X}^* + e^{\lambda t} \tilde{\mathbf{X}}) + [\mathbf{A} + \lambda \tilde{\mathbf{A}} + \lambda^2 \tilde{\mathbf{M}}] \tilde{\mathbf{X}} e^{\lambda t} = \mathbf{b}_L \quad (4.42)$$

où  $\mathbf{X}^*$  et  $\tilde{\mathbf{X}}$  sont respectivement les coefficients de Fourier de  $\mathbf{q}^*$  et  $\tilde{\mathbf{q}}$ , l'expression de  $\mathbf{A}$  est donnée par l'équation 3.33 et :

$$\tilde{\mathbf{M}} = \text{diag}(\mathbf{M}, \dots, \mathbf{M}) \quad (4.43)$$

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{C}} & & & & \\ & \tilde{\Lambda}_1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \tilde{\Lambda}_k & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \tilde{\Lambda}_M \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

avec

$$\tilde{\Lambda}_k = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{C}} & 2(k\omega) \mathbf{M} \\ -2(k\omega) \mathbf{M} & \tilde{\mathbf{C}} \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

Un développement limité au premier ordre de  $\mathbf{b}_{NL}(\mathbf{X}^* + e^{\lambda t} \tilde{\mathbf{X}})$  au voisinage de  $\mathbf{X}^*$  fournit :

$$\mathbf{b}_{NL}(\mathbf{X}^* + e^{\lambda t} \tilde{\mathbf{X}}) \approx \mathbf{b}_{NL}(\mathbf{X}^*) + \frac{\partial \mathbf{b}_{NL}}{\partial \mathbf{X}^*}(\mathbf{X}^*) \cdot e^{\lambda t} \tilde{\mathbf{X}} \quad (4.46)$$

En injectant cette expression dans l'équation 4.42, il vient, compte-tenu de l'expression 4.39, le problème aux valeurs propres suivant, :

$$\left[ \lambda^2 \tilde{\mathbf{M}} + \lambda \tilde{\mathbf{A}} + \mathbf{A} + \frac{\partial \mathbf{b}_{NL}}{\partial \mathbf{X}^*}(\mathbf{X}^*) \right] \cdot \tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{0} \quad (4.47)$$

Les valeurs propres de ce problème sont complexes. Si elles possèdent toutes une partie réelle négative alors l'amplitude de la perturbation va décroître et la solution périodique  $\mathbf{X}^*$  sera stable. Par contre, si une ou plusieurs valeurs propres possèdent une partie réelle positive alors les amplitudes de la perturbation augmenteront exponentiellement dans le temps et la solution périodique  $\mathbf{X}^*$  sera donc instable. Cette méthode d'étude de stabilité dans le domaine fréquentiel est couramment appelée méthode de Hill. Cette façon de procéder présente l'avantage de ne nécessiter aucune intégration temporelle contrairement à l'étude de stabilité selon la théorie de Floquet. Par contre, elle nécessite le calcul de la jacobienne des termes non linéaires ainsi qu'un développement en série de Fourier de la perturbation  $\tilde{\mathbf{X}}$ , dont la troncature peut influencer sur le calcul de la stabilité, au même titre de celle de  $\mathbf{X}^*$  d'ailleurs.

Une autre possibilité d'étude de stabilité dans le domaine fréquentiel a été développée et consiste à ramener l'étude de la stabilité d'une solution périodique à l'étude de stabilité d'un point d'équilibre dans l'espace de Fourier. Pour cela, considérons un développement en série de Fourier tronquée d'une solution périodique  $\mathbf{q}(t)$ , en utilisant une méthode de la moyenne [69], c'est-à-dire que les coefficients de Fourier sont supposés varier de façon lente dans le temps

(selon une échelle de temps lente  $\eta$ ) par rapport à la fréquence de la solution (repérée par une échelle de temps rapide  $\tau$ ) :

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}(\tau, t) = \mathbf{a}_0(\eta) + \sum_{m=1}^M (\mathbf{a}_m(\eta) \cdot \cos(m\omega\tau) + \mathbf{b}_m(\eta) \cdot \sin(m\omega\tau)) \quad (4.48)$$

L'échelle de temps rapide  $\tau$  peut être interprétée comme l'échelle de temps associée à pulsation de la réponse périodique alors que l'échelle de temps lente  $\eta$  peut plutôt être considérée comme associée à une perturbation. Cette dissociation de l'échelle temporelle nous rajoute une inconnue et donc, nous autorise à considérer une équation supplémentaire. Il est ainsi courant de se donner la forme de la vitesse :

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t}(t) = \dot{\mathbf{q}}(t) = \sum_{m=1}^M (-(m\omega) \mathbf{a}_m(\eta) \cdot \sin(m\omega\tau) + (m\omega) \mathbf{b}_m(\eta) \cdot \cos(m\omega\tau)) \quad (4.49)$$

Cependant, compte-tenu de la dissociation de l'échelle temporelle, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t}(t) &= \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \tau}(t) + \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \eta}(t) = \mathbf{a}'_0(\eta) + \sum_{m=1}^M (\mathbf{a}'_m(\eta) \cdot \cos(m\omega\tau) + \mathbf{b}'_m(\eta) \cdot \sin(m\omega\tau)) \\ &\quad + \sum_{m=1}^M (-(m\omega) \mathbf{a}_m(\eta) \cdot \sin(m\omega\tau) + (m\omega) \mathbf{b}_m(\eta) \cdot \cos(m\omega\tau)) \end{aligned} \quad (4.50)$$

où ' représente une différenciation par rapport à  $\eta$ . En comparant les équations 4.49 et 4.50, il vient l'égalité suivante :

$$\mathbf{a}'_0(\eta) + \sum_{m=1}^M (\mathbf{a}'_m(\eta) \cdot \cos(m\omega\tau) + \mathbf{b}'_m(\eta) \cdot \sin(m\omega\tau)) = \mathbf{0} \quad (4.51)$$

Compte-tenu de cette égalité, l'accélération s'exprime par :

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{q}}(t) &= \sum_{m=1}^M (-(m\omega) \mathbf{a}'_m(\eta) \cdot \sin(m\omega\tau) + (m\omega) \mathbf{b}'_m(\eta) \cdot \cos(m\omega\tau)) \\ &\quad + \sum_{m=1}^M (-(m\omega)^2 \mathbf{a}_m(\eta) \cdot \cos(m\omega\tau) - (m\omega)^2 \mathbf{b}_m(\eta) \cdot \sin(m\omega\tau)) \end{aligned} \quad (4.52)$$

Si comme précédemment, on injecte les expressions des déplacements, vitesses et accélérations dans l'équation du mouvement 4.38 puis qu'on la projette sur les vecteurs de la base de Fourier (Cf. équation 3.31), il vient l'équation :

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{X}' + \mathbf{b}_{NL}(\mathbf{X}) = \mathbf{b}_L \quad (4.53)$$

où  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{X}'$  sont respectivement les vecteurs des coefficients de Fourier et ceux de leurs dérivées par rapport à  $\eta$ . La matrice  $\mathbf{A}$  a la même expression que précédemment (Cf. équation 3.33) et celle de la matrice  $\mathbf{B}$  est la suivante :

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & & & & \\ & \Psi_1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \Psi_k & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \Psi_M \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

avec

$$\Psi_k = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & (k\omega) \mathbf{M} \\ -(k\omega) \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.55)$$

Une solution périodique et donc un cycle limite doit, dans l'espace de Fourier vérifier :

$$\mathbf{X}' = \mathbf{0} \quad (4.56)$$

C'est-à-dire que dans cet espace, une solution périodique est un point d'équilibre pour l'équation :

$$\mathbf{B}.\mathbf{X}' = \mathbf{b}_L - \mathbf{A}.\mathbf{X} - \mathbf{b}_{NL}(\mathbf{X}) = \mathbf{0} \quad (4.57)$$

L'étude de la stabilité d'une solution périodique  $\mathbf{X}_0$  va donc passer par l'étude de la stabilité d'un point d'équilibre. Considérons donc une perturbation  $\mathbf{Y}$  de cette solution périodique  $\mathbf{X}_0$ . En injectant  $\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + \mathbf{Y}$  dans l'équation 4.53 et en tenant compte du fait que  $\mathbf{X}_0$  vérifie la relation 4.56, il vient l'équation :

$$\mathbf{A}.\mathbf{X}_0 + \mathbf{B}.\mathbf{Y}' + \mathbf{b}_{NL}(\mathbf{X}_0 + \mathbf{Y}) = \mathbf{b}_L \quad (4.58)$$

Un développement limité de  $\mathbf{b}_{NL}(\mathbf{X}_0 + \mathbf{Y})$  au premier ordre, en  $\mathbf{X}_0$ , donne :

$$\mathbf{b}_{NL}(\mathbf{X}_0 + \mathbf{Y}) \approx \mathbf{b}_{NL}(\mathbf{X}_0) + \frac{\partial \mathbf{b}_{NL}}{\partial \mathbf{X}}(\mathbf{X}_0) \cdot \mathbf{Y} \quad (4.59)$$

En injectant cette équation dans l'expression 4.58, sachant que  $\mathbf{X}_0$  vérifie l'équation 4.39, il vient :

$$\mathbf{A}.\mathbf{Y} + \mathbf{B}.\mathbf{Y}' + \frac{\partial \mathbf{b}_{NL}}{\partial \mathbf{X}}(\mathbf{X}_0) \cdot \mathbf{Y} = \mathbf{0} \quad (4.60)$$

Si la dépendance temporelle de  $\mathbf{Y}$  est de la forme :  $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}e^{\lambda\eta}$  alors on a le problème aux valeurs propres généralisées suivant :

$$\left[ \mathbf{A} + \frac{\partial \mathbf{b}_{NL}}{\partial \mathbf{X}}(\mathbf{X}_0) + \lambda \mathbf{B} \right] \cdot \mathbf{Y} = \mathbf{0} \quad (4.61)$$

Les valeurs propres de ce problème vont, comme dans la méthode précédente nous permettre de statuer sur la stabilité de la solution périodique  $\mathbf{X}_0$  : si elles ont toutes une partie réelle négative, la solution est stable et si une ou plusieurs d'entre elles ont une partie réelle positive,

la solution sera instable.

Dans les deux méthodes fréquentielles présentées ici, le calcul de  $\frac{\partial \mathbf{b}_{NL}}{\partial \mathbf{X}}(\mathbf{X}_0)$  peut nécessiter une procédure AFT si une expression analytique n'est pas possible puisque  $\mathbf{b}_{NL}$  dépend des efforts non linéaires qui n'ont de significations que dans le domaine temporel.

Pour terminer ce chapitre, l'étude de la stabilité, dans le domaine temporel, du modèle simple d'interaction rotor/stator utilisé pour valider les méthodes d'estimation du comportement non linéaire d'un système au chapitre précédent va être effectuée brièvement dans la section suivante.

## 4.8 Validation de l'étude de stabilité selon la théorie de Floquet

Au même titre que les méthodes d'estimation du comportement non linéaire des systèmes mécaniques ont été validées au chapitre 3, un exemple d'application de la théorie de Floquet au modèle simple d'interaction rotor/stator utilisé dans ce même chapitre va être donné.

Une méthode de shooting a été appliquée au modèle de Demailly [17], en section 3.4 du chapitre 3, afin de déterminer une solution périodique. La stabilité de celle-ci peut être analysée très facilement. En effet, nous avons vu dans la section 4.5.0.1 du présent chapitre, que lors de l'application de la méthode de shooting, la matrice monodrome était calculée. Les valeurs propres de celle-ci alors obtenues lors de l'étude du modèle de Demailly sont les suivantes :

valeurs propres $\rho_m$	$\ \rho_m\ $
-7.67e-02 + 8.44e-01i	8.47e-01
-7.67e-02 - 8.44e-01i	8.47e-01
2.19e-01 + 6.49e-02i	2.28e-01
2.19e-01 - 6.49e-02i	2.28e-01
-1.86e-01 + 6.24e-02i	1.96e-01
-1.86e-01 - 6.24e-02i	1.96e-01
-2.81e-14	2.81e-14
-4.08e-16	4.08e-16

TAB. 4.1 – Valeurs propres de la matrice monodrome du système de Demailly [17] à  $\Omega = 1272$  tr/min

D'après la théorie de Floquet (développée en section 4.5.0.1), nous pouvons affirmer que la solution périodique du système de Demailly [17], à  $\Omega = 1272$  tr/min, représentée par la figure 3.9, est bien stable puisqu'aucune valeur propre de la matrice monodrome n'est en dehors du cercle unité. De plus, on peut remarquer que le système ici étudié est non autonome et donc, nous voyons qu'il n'y a pas dans ce cas, conformément à la théorie de Floquet, de valeur

propre sur le cercle unité. Par contre, il faut préciser que le calcul de la matrice monodrome est conditionné par l'intégration temporelle de l'équation 3.21 dont les termes sont approchés par des différences finies. Ainsi, cette matrice est extrêmement conditionnée par les paramètres de l'intégration temporelle ainsi que par ceux de l'approximation des gradients des forces. Beaucoup de précautions doivent donc être prises lors de l'étude de cette matrice pour statuer sur la stabilité d'une solution périodique.

## 4.9 Conclusion

Au travers de ce chapitre, les théories de la stabilité ainsi que les principales méthodes d'étude de stabilité du comportement non linéaire de systèmes mécaniques ont été détaillées. Un exemple d'application de la théorie de Floquet a été réalisé sur le modèle simple d'interaction rotor/stator utilisé dans le chapitre 3. Dans le domaine temporel, cette procédure peut s'avérer coûteuse en temps de calcul puisqu'elle nécessite l'intégration de l'équation du comportement dynamique du système sur une période. Par contre, comme nous l'avons illustré, la stabilité d'une solution périodique peut découler directement d'une méthode de shooting et réduit finalement le nombre d'étape à effectuer pour étudier la stabilité de la solution obtenue.

Dans ce qui suit, la stabilité d'un modèle d'interaction plus complet, entre une structure tournante et une structure fixe, comportant peu de degrés de liberté, va être étudiée. Les résultats de ces études seront ensuite validés par les méthodes d'estimation du comportement non linéaire développées au chapitre 3. Ceci constituera une première approche phénoménologique du contact rotor/stator.





## Chapitre 5

# Modèles phénoménologiques de contact rotor-stator

Afin d’appréhender la dynamique et les problèmes d’instabilité des turbomachines, dans le cas de contact entre les aubes des parties tournantes et le carter, des modèles simples vont être développés. Ceux-ci simuleront l’interaction, en un ou plusieurs points, entre une structure tournante et une structure fixe.

Tout d’abord, la stabilité d’une structure élastique circulaire (représentant un carter) excitée par des charges tournantes, frottant ou non contre sa face interne, sera étudiée. Le comportement dynamique de ce système sera ensuite analysé grâce aux méthodes présentées aux chapitres précédents. Enfin, ce même système sera étudié dans le cas où les décollements entre la structure rotative et la structure fixe sont autorisés.

Le but de ce chapitre est de dégager les phénomènes prédominants lors de telles interactions, par le biais de l’analyse de la stabilité du système et par l’étude de son comportement dynamique. Ce dernier sera obtenu essentiellement par des intégrations temporelles directes. Nous montrerons dans certains cas simples, lorsque la dynamique du système s’y prête, qu’il est possible d’appliquer les méthodes non linéaires développées au chapitre 3. Les limites de celles-ci seront également mises en évidence.

### 5.1 Anneau excité par des charges tournantes en contact permanent

#### 5.1.1 Modèles

Les problèmes résultant d’une ou plusieurs charges se déplaçant sur une structure élastique sont fréquents. Le cas des structures élastiques animées d’un mouvement de rotation a ainsi été particulièrement étudié. Il s’avère qu’un disque flexible en rotation, excité par des charges, peut être instable. Ce genre de phénomène peut survenir dans les domaines de l’usinage avec l’utilisation de scies circulaires [62, 63], des disques durs informatiques [41, 40, 16] ou encore des freins à disques [73, 6]. Généralement, les systèmes étudiés consistent en un disque élastique,

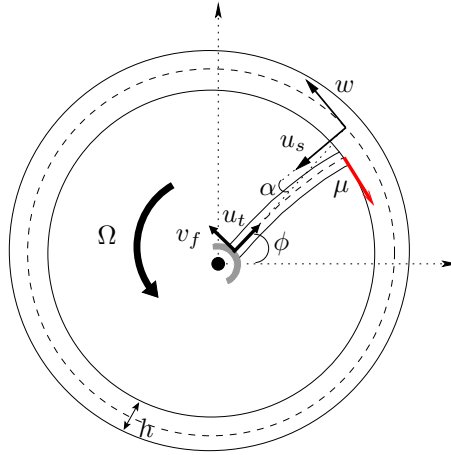


FIG. 5.1 – Modèle d’anneau élastique excité par une poutre rotative frottant sur sa face interne

dont les vibrations de flexion sont considérées, excité par une ou plusieurs charges statiques sur une de ses faces. Il peut également s’agir au contraire d’un disque statique excité par des charges tournantes à sa surface. Les instabilités subies par ce type de système ainsi que les vitesses critiques associées ont pu être déterminées. Par contre, très peu d’études concernent un anneau élastique excité par des charges tournantes frottant sur sa surface interne. Récemment Canchi et Parker [5] ont étudié la stabilité d’un anneau élastique excité par des systèmes masse-ressort en rotation glissant sans frottement sur sa face interne.

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser au comportement dynamique et à la stabilité d’un anneau élastique représentant un carter de turbomachine excité par des aubes en rotation frottant sur sa surface interne, comme l’illustre la figure 5.1 dans le cas d’une seule aube.

Le modèle va être entièrement développé dans le repère corotationnel c’est-à-dire, dans le repère lié aux aubes et dans lequel celles-ci sont fixes. Ces dernières sont modélisées par des poutres d’Euler-Bernoulli possédant deux degrés de liberté : un degré de liberté de traction-compression  $u_t$  ainsi qu’un degré de liberté de flexion  $v_f$ . Une approximation de Rayleigh-Ritz est utilisée pour exprimer ces derniers (Cf. section 1.2.2). Dans le cas du degré de liberté de traction/compression des aubes, la fonction de Ritz employée peut être exactement le premier mode de traction/compression d’une poutre encastrée-libre. Les deux degrés de liberté de l’aube  $j$  s’expriment ainsi par :

$$u_{t_j}(x, t) = u_{t_j}(t) \sin(\pi x / 2R_{stat}) \quad (5.1)$$

$$v_{f_j}(x, t) = v_{f_j}(t) (1 - \cos(\pi x / 2R_{stat})) \quad (5.2)$$

où  $x$  est l’abscisse le long de la poutre et  $R_{stat}$  le rayon du carter. Celui-ci vérifie les hypothèses des poutres d’Euler-Bernoulli. Deux déplacements sont attribués en chaque point de position angulaire  $\phi$  dans le repère tournant : un déplacement radial  $u_s(\phi, t)$  et un déplacement tangent  $w(\phi, t)$ . Ceux-ci peuvent également être exprimés grâce à des fonctions de Ritz. Ainsi, le

déplacement tangent du carter en un point de position angulaire  $\phi$  s'exprime comme suit [58] :

$$w(\phi, t) = \sum_{n=2}^{ktot} A_n(t) \cos(n\phi) + B_n(t) \sin(n\phi) \quad (5.3)$$

où, le déplacement de corps rigide a été supprimé. Cependant, afin de considérer le modèle le plus simple possible (pour que l'analyse phénoménologique du problème soit aisée), une seule fonction de Ritz (correspondant au mode exacte de flexion de l'anneau) sera considérée. Ainsi, seul un mode d'anneau (le  $n^{\text{ième}}$ ) pourra être excité à la fois par les aubes. Le déplacement tangent de l'anneau s'écrira donc :

$$w(\phi, t) = A_n(t) \cos(n\phi) + B_n(t) \sin(n\phi), \quad n \in \mathbf{N}, \quad n \geq 2 \quad (5.4)$$

De plus, cet anneau est supposé être inextensible. Ceci se traduit par une relation entre ses déplacements radiaux et ses déplacements tangents :  $u_s(\phi, t) = \partial w(\phi, t) / \partial \phi$ . Ainsi, le déplacement radial de l'anneau au point de position angulaire  $\phi$ , dans le repère tournant, est donné par :

$$u_s(\phi, t) = -nA_n(t) \sin(n\phi) + nB_n(t) \cos(n\phi), \quad n \in \mathbf{N}, \quad n \geq 2 \quad (5.5)$$

Dans ce chapitre, les aubes sont supposées être en contact permanent avec le carter. Il en résulte une relation de liaison entre le déplacement radial de l'anneau au point de contact et les déplacements de la  $j^{\text{ème}}$  aube positionnée à l'angle  $\phi_j$  dans le repère corotationnel :

$$u_s(\phi = \phi_j, t) = -u_{t_j}(x = R_{stat}, t) \cos \alpha_j + v_{f_j}(x = R_{stat}, t) \sin \alpha_j \quad (5.6)$$

$\alpha_j$  étant l'angle entre la normale à la surface interne du carter au point de contact avec l'aube et la fibre neutre de celle-ci.

Comme dans la section 1.2.2, une méthode énergétique est employée pour obtenir l'équation matricielle gérant le comportement dynamique du système. Les énergies cinétique  $T$  et potentielle  $U$  du système possédant  $N$  aubes sont alors définies :

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2} \int_{-\Omega t}^{2\pi - \Omega t} \rho_{stat} S_{stat} \left\{ \left[ \dot{u}_s(\phi, t) - \Omega \frac{\partial u_s}{\partial \phi}(\phi, t) \right]^2 + \left[ \dot{w}(\phi, t) - \Omega \frac{\partial w}{\partial \phi}(\phi, t) \right]^2 \right\} R_{stat} d\phi \\ & + \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} \int_0^{R_{stat}} \rho_{b_j} S_{b_j} \left\{ \dot{u}_{t_j}^2(x, t) + \dot{v}_{f_j}^2(x, t) + \Omega^2 \left( (x + u_{t_j}(x, t))^2 + v_{f_j}^2(x, t) \right) \right. \\ & \quad \left. + 2\Omega \left( \dot{v}_{f_j}(x, t) (x + u_{t_j}(x, t)) - \dot{u}_{t_j}(x, t) v_{f_j}(x, t) \right) \right\} dx \\ & + \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} \int_0^{R_{stat}} \rho_{b_j} I_{b_j} \left( \Omega + \frac{\partial \dot{v}_{f_j}(x, t)}{\partial x} \right)^2 dx \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned}
U = \frac{1}{2} \int_{-\Omega t}^{2\pi - \Omega t} \frac{E_{stat} I_{stat}}{R_{stat}^3} \left\{ \frac{\partial u_s}{\partial \phi}(\phi, t) + u_s(\phi, t) \right\}^2 d\phi \\
+ \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} \int_0^{R_{stat}} E_{b_j} S_{b_j} \left\{ \frac{\partial u_{t_j}(x, t)}{\partial x} \right\}^2 dx \\
+ \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} \int_0^{R_{stat}} E_{b_j} I_{b_j} \left\{ \frac{\partial^2 v_{f_j}(x, t)}{\partial x^2} \right\}^2 dx \quad (5.8)
\end{aligned}$$

où  $\rho_{stat}$ ,  $S_{stat}$ ,  $E_{stat}$ ,  $I_{stat}$  et  $\rho_{b_j}$ ,  $S_{b_j}$ ,  $E_{b_j}$ ,  $I_{b_j}$  sont respectivement les densités, les aires des sections droites, les modules d'Young et les inerties diamétrales du stator et de la  $j^{\text{ème}}$  aube. Dans un souci de simplicité, aucune fonction de dissipation n'est introduite (ni le carter ni les aubes ne sont amortis).

Dans cette approche énergétique, le frottement est introduit par l'intermédiaire de son travail :

$$\begin{aligned}
W_{ext} = \sum_{j=1}^N T_{b_j \rightarrow stat} \left[ w(\phi, t) \left\{ 1 - \frac{h}{2R_{stat}} \right\} - \frac{h}{2R_{stat}} \frac{\partial u_s(\phi, t)}{\partial \phi} \right. \\
\left. - [v_{f_j}(x = R_{stat}, t) (\cos \alpha_j + \sin \alpha_j \tan \alpha_j) - u_s(\phi, t) \tan \alpha_j] \right] \delta(\phi - \phi_j) \quad (5.9)
\end{aligned}$$

où, dans le repère centripète direct (repère local à l'anneau),  $T_{b_j \rightarrow stat} = -\mu |N_{b_j \rightarrow stat}| \text{sign}(V_{slip})$  est la force de frottement de la  $j^{\text{ème}}$  aube sur l'anneau. Dans cette expression,  $V_{slip}$  représente la vitesse de glissement de l'aube sur la face interne du carter et  $N_{b_j \rightarrow stat}$ , l'intensité de la composante radiale de la force appliquée par l'aube sur l'anneau. Dans le cas précis du contact entre les aubes d'un rotor d'une turbomachine et un carter, celle-ci peut s'exprimer par la superposition d'une précharge radiale constante  $-N_U$  dans le repère corotationnel centripète résultant du balourd et d'une charge dynamique résultant de la dynamique propre du système. Les expressions complètes de cette force de frottement, de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle du système prenant en compte la relation de liaison 5.6 ainsi que l'approximation de Rayleigh-Ritz, sont développées dans l'annexe A.

L'application des équations de Lagrange nous fournit une équation matricielle de la forme :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + (\mathbf{G} + \mathbf{T})\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{F} \quad (5.10)$$

où  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{G}$  et  $\mathbf{K}$  sont respectivement les matrices de masse, gyroscopique et de raideur (incluant les termes d'assouplissement centrifuges) du système.  $\mathbf{F}$  représente les forces appliquées à ce dernier et  $\mathbf{T}$  est une matrice dépendant du coefficient de frottement. Les expressions de tous ces éléments sont détaillées en annexe A. Enfin, le vecteur  $\mathbf{X}$  des inconnues a pour expression, dans le cas où le système est constitué de  $N$  aubes :  $\mathbf{X}^T = \left\{ A_n \ B_n \ v_{f_1} \ \cdots \ \cdots \ \cdots \ v_{f_N} \right\}$ . Il faut préciser que ce modèle de frottement ainsi inclus dans l'équation matricielle précédente n'est valable que sous certaines hypothèses (rappelées également dans l'annexe A) qui sont globalement :

- la précharge due au balourd assure un signe constant de la composante normale de la force exercée par chaque aube sur le carter
- la vitesse de glissement de chaque aube est toujours orientée dans le même sens

Ces conditions sont tout à fait réalistes pour des vitesses de rotation suffisantes. De plus, l'objectif de ce présent modèle est, à ce stade, de détecter les éventuels phénomènes d'instabilité et non de calculer leurs éventuels cycles limites. Les hypothèses avancées par la modélisation du frottement ne pénalisent donc en rien la pertinence du modèle.

Afin de bien comprendre les phénomènes régissant le comportement d'une telle structure, son étude va se faire en deux étapes.

Tout d'abord, le frottement sera négligé. Des études de stabilité de ce système seront alors réalisées puis le comportement dynamique de ce dernier sera analysé.

Ensuite, le frottement sera introduit et de la même manière, des études de stabilité seront faites ainsi que l'analyse du comportement dynamique du système qui en découle.

## 5.1.2 Contact sans frottement

Dans un premier temps, nous allons négliger le frottement. Dans ce cas, le degré de liberté de flexion des aubes ne peut pas être sollicité. Il convient donc de considérer des aubes ne possédant qu'un degré de liberté de traction/compression. De plus, nous allons pour l'instant les considérer orthogonales à la face interne de l'anneau (c'est-à-dire  $\alpha_j = 0$ ). Elles peuvent donc être finalement modélisées par des systèmes masse-ressort à un degré de liberté comme illustré par la figure 5.2. Ceci nous permettra d'ailleurs de considérer aisément les paramètres modaux des aubes :  $m_r$  masse modale et  $k_r$ , raideur modale. L'équation matricielle du comportement de la structure considérée dans ce paragraphe peut être aisément déduite de l'annexe A en prenant  $\mu = 0$  et  $\alpha_j = 0$ . Elle est de la forme :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{G}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{F} \quad (5.11)$$

La stabilité de ce système ainsi que son comportement dynamique seront étudiés.

### 5.1.2.1 Études de stabilité

Dans le repère tournant, il est intuitif que le système pourra adopter des configurations d'équilibre statique. La stabilité de celles-ci pourra être déterminée en procédant comme indiqué en section 4.3. Il suffit ainsi de déterminer les solutions  $s = a + i b$  de l'équation :

$$\det(s^2\mathbf{M} + s\mathbf{G} + \mathbf{K}) = 0 \quad (5.12)$$

Le système sera instable si une ou plusieurs valeurs propres  $s$  ont une partie réelle  $a$  positive. Les parties réelles  $b$ , quant à elles, correspondent aux pulsations propres du système.

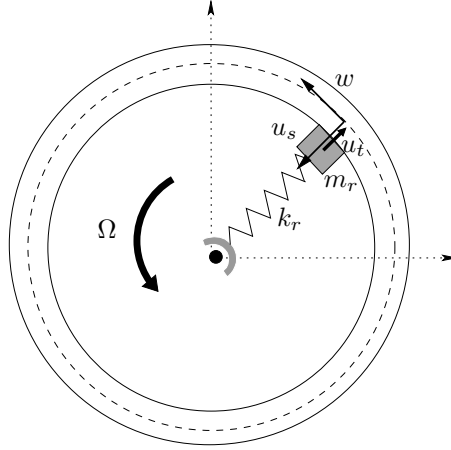


FIG. 5.2 – Modèle d’anneau élastique excité par un système masse-ressort à un degré de liberté sans frottement

### Influence des caractéristiques des aubes

Dans cette partie, nous allons étudier l’influence des paramètres des aubes (c’est-à-dire de  $m_r$  et  $k_r$ ) sur la stabilité du système. Pour cela, nous allons, dans du premier temps, considérer une seule aube excitant l’anneau. Une seconde étape consistera à considérer l’influence du nombre d’aubes en contact avec le carter sur la stabilité du système.

Dans le cas particulier d’une seule aube au contact de l’anneau, l’équation 5.11 s’écrit, compte tenu de la relation de liaison 5.6 entre les degrés de liberté :

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} M_{stat}(n^2 + 1) & 0 \\ 0 & M_{stat}(n^2 + 1) + m_r n^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{A}_n \\ \ddot{B}_n \end{Bmatrix} \\
 & + \begin{bmatrix} 0 & -2M_{stat}n\Omega(n^2 + 1) \\ 2M_{stat}n\Omega(n^2 + 1) & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{A}_n \\ \dot{B}_n \end{Bmatrix} \\
 & + \begin{bmatrix} K_{stat}n^2(n^2 - 1)^2 & 0 \\ -M_{stat}n^2\Omega^2(n^2 + 1) & K_{stat}n^2(n^2 - 1)^2 \\ 0 & -M_{stat}n^2\Omega^2(n^2 + 1) + (k_r - m_r\Omega^2)n^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_n \\ B_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -m_r R_{stat}\Omega^2 n \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \tag{5.13}$$

où  $M_{stat} = \rho_{stat} S_{stat} R_{stat} \pi$  et  $K_{stat} = \frac{E_{stat} I_{stat} \pi}{R_{stat}^3}$ . Cette équation peut bien sûr être déduite de l’annexe A.

L’analyse de stabilité du troisième mode de l’anneau excité par un système masse-ressort de paramètres  $m_r = 10 \text{ kg}$  et  $k_r = 1.10^6 \text{ N.m}^{-1}$  est représentée en figure 5.3. Le graphe supérieur montre l’évolution des parties réelles des valeurs propres  $s$  du système en fonction de la vitesse de rotation de l’aube, l’évolution des parties imaginaires associées étant représentée sur le graphe inférieur (modulo  $2\pi$ ). Il apparaît ainsi deux plages de vitesses de rotation dans

lesquelles le système est instable puisqu'il possède des valeurs propres à partie réelle positive. Le premier type d'instabilité, entre  $\Omega_c$  et  $\Omega_{c2}$  correspond à une divergence du mode direct de l'anneau c'est-à-dire à une instabilité à fréquence nulle dans ce repère tournant alors que le second type d'instabilité, à partir de  $\Omega_{mc}$ , correspond à un flottement qui est une instabilité vibratoire, toujours dans ce repère. Il s'agit plus précisément d'une coalescence du mode direct avec le mode rétrograde de l'anneau : les deux adoptent la même fréquence mais l'un devient instable alors que l'autre reste stable. Il faut noter que ces phénomènes sont qualitativement proches de ceux obtenus par Crandall [16], Iwan et Moeller [40] et Iwan et Stahl [41] dans le cas non pas d'un anneau mais d'un disque excité par une charge, ainsi que récemment par Canchi et Parker [5].

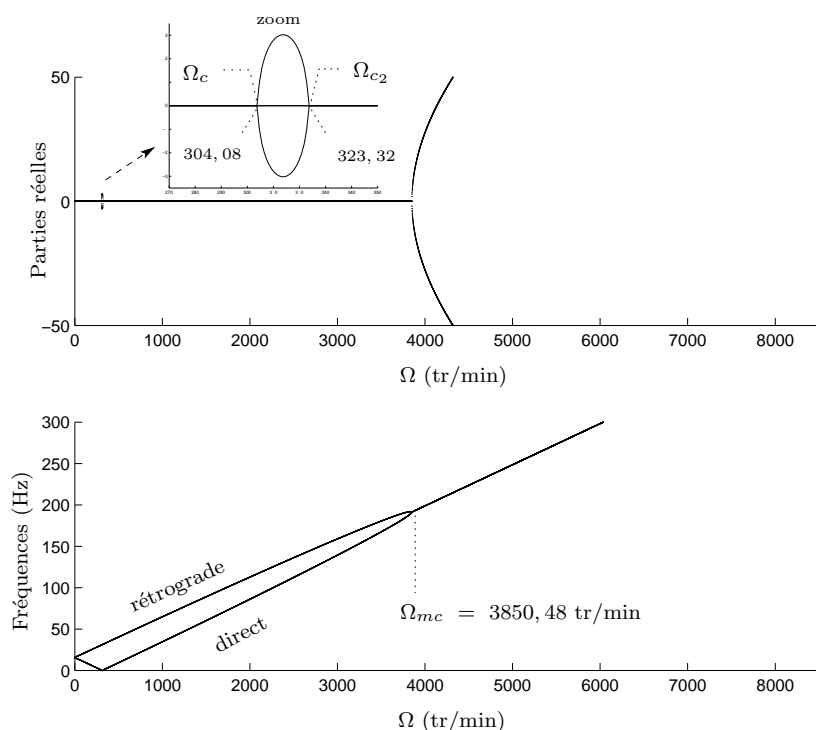


FIG. 5.3 – Analyse de stabilité du mode à trois diamètres nodaux du stator excité par un système masse-ressort radial tournant avec  $m_r = 10kg$  et  $k_r = 1.10^6 N.m^{-1}$

Dans ce cas simple, ces vitesses de rotation critiques ont pu être déterminées. En ce qui concerne les vitesses critiques associées à la divergence, le critère de Routh-Hurwitz peut être appliqué. En effet, il s'agit de déterminer si le polynôme caractéristique 5.12 possède des racines à partie réelle positive. Celui-ci est de la forme suivante :

$$P(s) = As^4 + Bs^2 + C \quad (5.14)$$

L'expression générale des coefficients  $A$ ,  $B$  et  $C$  dans le cas de  $N$  aubes est donnée en annexe B. Dans le cas particulier d'une seule aube, ceux-ci ont les expressions suivantes :



$$A = [M_{stat} (n^2 + 1)]^2 + M_{stat} (n^2 + 1) n^2 m_r \quad (5.15)$$

$$B = K_{stat} n^2 (n^2 - 1)^2 [2M_{stat} (n^2 + 1) + n^2 m_r] + M_{stat} n^2 \Omega^2 (n^2 + 1)^2 [2M_{stat} - m_r] \\ + M_{stat} (n^2 + 1) n^2 k_r \quad (5.16)$$

$$C = [-M_{stat} n^2 \Omega^2 (n^2 + 1) + K_{stat} n^2 (n^2 - 1)^2] \\ \times [-n^2 \Omega^2 (M_{stat} (n^2 + 1) + m_r) + K_{stat} n^2 (n^2 - 1)^2 + n^2 k_r] \quad (5.17)$$

Le critère de Routh-Hurwitz peut être appliqué au polynôme  $\tilde{P}(x) = Ax^2 + Bx + C$  (et non au polynôme  $P(s)$ ) afin de savoir à quelles vitesses de rotation le système diverge. En effet, les valeurs propres d'un système conservatif, comme c'est le cas du système ici considéré, sont purement imaginaires c'est-à-dire  $s = \pm ib$  avec  $b > 0$  quand il est stable et donc,  $Re(x = s^2) = -b < 0$ . Quand le système vient à diverger,  $s = \pm a$  avec  $a > 0$  et  $s^2 = a^2$ . Ainsi, dans ce cas,  $Re(s) > 0$  et  $Re(x) > 0$ . Le critère de Routh appliqué à  $\tilde{P}(x)$  et à  $P(s)$  a donc les mêmes conclusions dans le cas d'une divergence.

Selon ce critère, le polynôme  $\tilde{P}(x)$  a toutes ses racines de parties réelles négatives si  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont du même signe. Puisque  $A > 0$ , la position des racines de  $\tilde{P}(x)$  dans le plan complexe dépend du signe de  $B$  et de  $C$ . Il s'avère que :

- si  $m_r < 2M_{stat}$  alors  $B > 0$  et la position des racines du polynôme  $\tilde{P}(x)$  dépend uniquement du signe de  $C$ . Celui-ci est négatif si :
  - $\Omega_c^2 < \Omega^2 < \Omega_{c2}^2$ , dans le cas où  $\omega_r^2 > \Omega_c^2$ .
  - $\Omega_{c2}^2 < \Omega^2 < \Omega_c^2$  dans le cas où  $\omega_r^2 < \Omega_c^2$ .
- si  $m_r > 2M_{stat}$ , le signe de  $B$  peut changer, alors que celui de  $C$  suit toujours les évolutions décrites à l'alinéa précédent.  $B$  peut en effet être négatif si  $\Omega^2 > \Omega_{c3}^2$ .

avec

$$\Omega_c^2 = \frac{K_{stat} (n^2 - 1)^2}{M_{stat} (n^2 + 1)} \quad (5.18)$$

$$\omega_r^2 = \frac{k_r}{m_r} \quad (5.19)$$

$$\Omega_{c2}^2 = \frac{\Omega_c^2}{1 + \frac{m_r}{M_{stat} (n^2 + 1)}} + \frac{\omega_r^2}{1 + \frac{M_{stat} (n^2 + 1)}{m_r}} \quad (5.20)$$

$$\Omega_{c3}^2 = \Omega_c^2 \left[ \frac{2M_{stat} (n^2 + 1) + n^2 m_r}{m_r (n^2 + 1) - 2M_{stat} (n^2 + 1)} \right] + \frac{k_r}{m_r (n^2 + 1) - 2M_{stat} (n^2 + 1)} \quad (5.21)$$

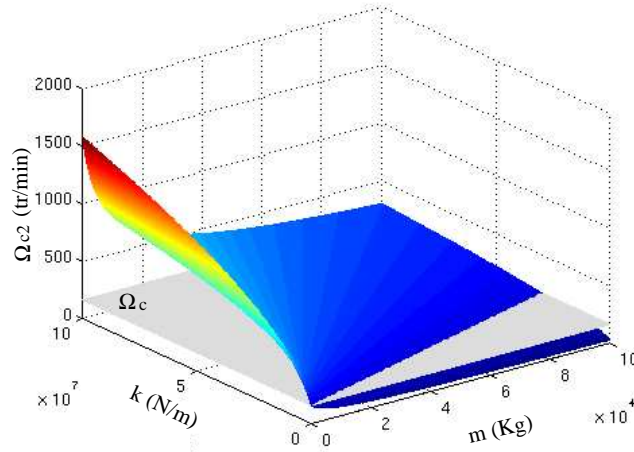


FIG. 5.4 – Évolution de  $\Omega_c$  et  $\Omega_{c2}$  en fonction de la masse modale et de la raideur modale en traction/compression d'une aube

Dans ces expressions,  $\Omega_c$  est la vitesse critique de propagation d'onde dans le carter, au  $n^{\text{ième}}$  mode considéré et  $\omega_r$ , la pulsation propre du système masse-ressort.

Ainsi, la masse et la raideur de la charge sont responsables de la divergence du système. D'une façon générale, plus l'aube a une raideur en traction/compression élevée, plus la plage de vitesse de rotation dans laquelle le système diverge est grande. Dans le cas d'une aube très rigide, cette plage de vitesse de rotation débute par  $\Omega_c$  et se referme à  $\Omega_{c2}$ . Concernant l'effet de la masse, lorsque celle-ci augmente,  $\Omega_{c2}$  décroît et ce, jusqu'à devenir inférieure à  $\Omega_c$ . Il existe donc des cas où la plage de vitesse de rotation dans laquelle diverge le système, commence par  $\Omega_{c2}$ . La figure 5.4 représente l'évolution de ces deux vitesses de rotation critiques en fonction de la masse et de la raideur en traction/compression d'une aube.

La vitesse critique de flottement du système ne peut pas être déterminée analytiquement par le critère de Routh-Hurwitz comme dans le cas de la vitesse critique de divergence. En effet, lorsque le système conservatif se met à flotter, ses valeurs propres sont complexes :  $s = \pm(a + ib)$  et donc  $Re(s) = \pm a$  alors que  $Re(x = s^2) = a^2 - b^2$ . Cette instabilité ne peut donc pas être détectée par le critère de Routh-Hurwitz appliqué au polynôme  $\tilde{P}(x)$ . Cependant, dans le cas particulier du système conservatif ici considéré, une condition suffisante d'apparition de couplage de modes est d'avoir deux couples de valeurs propres complexes conjuguées ayant des parties réelles nulles et des parties imaginaires opposées c'est-à-dire  $\{(+i b_1, -i b_1), (+i b_2, -i b_2)\}$  avec  $b_1 = b_2$ . Cette condition est satisfaite si le discriminant de  $\tilde{P}(x)$  est nul. Ainsi, les vitesses critiques de flottement du système vérifient  $B^2 - 4AC = 0$ . Cette condition est une équation bicarrée en  $\Omega$  et admet, dans le cas particulier d'une seule charge radiale rotative, les solutions suivantes, sous réserve qu'elles soient réelles :

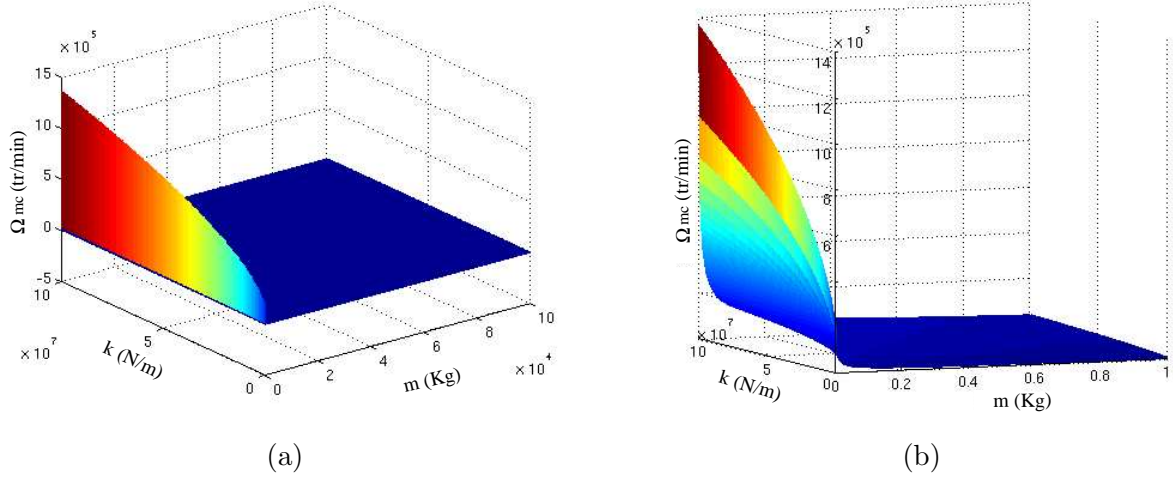


FIG. 5.5 – Évolution de  $\Omega_{mc}$  en fonction de la masse modale et de la raideur modale en traction/compression d'une aube

$$\Omega_{mc} = \pm \frac{\{m_r \chi [\gamma \pm 4\sqrt{\xi}]\}^{1/2}}{m_r n \chi} \quad (5.22)$$

avec,

$$\chi = [8M_{stat} (n^2 + 1)^2 - m_r (n^2 - 1)^2] \quad (5.23)$$

$$\gamma = 4M_{stat} (n^2 + 1) (2\tilde{K}_{stat} + n^2 k_r) + m_r n^2 (4\tilde{K}_{stat} + (n^2 - 1) [k_r - n^2 m_r \Omega_c^2]) \quad (5.24)$$

$$\begin{aligned} \xi = & (M_{stat} (n^2 + 1) + n^2 m_r) \left( M_{stat} (n^2 + 1) [n^2 k_r + 2\tilde{K}_{stat}]^2 \right. \\ & \left. + \tilde{K}_{stat} m_r n^2 [m_r n^2 \Omega_c^2 - k_r (n^2 + 1)] \right) \end{aligned} \quad (5.25)$$

$$\tilde{K}_{stat} = K_{stat} (n^3 - n)^2 \quad (5.26)$$

Les figures 5.5 (a) et (b) montrent l'évolution de  $\Omega_{mc}$  en fonction des paramètres modaux d'une aube n'ayant qu'un degré de liberté de traction/compression. Il apparaît ainsi une très forte dépendance de cette vitesse avec la masse : la vitesse à laquelle le système a ses modes qui se couplent décroît très vite quand la masse de la charge augmente. L'influence de la raideur en traction/compression c'est-à-dire, l'augmentation de  $\Omega_{mc}$  avec celle-ci, ne se fait donc sentir que pour des poutres de faible masse. Les figures qui suivent illustrent les résultats théoriques précédemment énoncés.

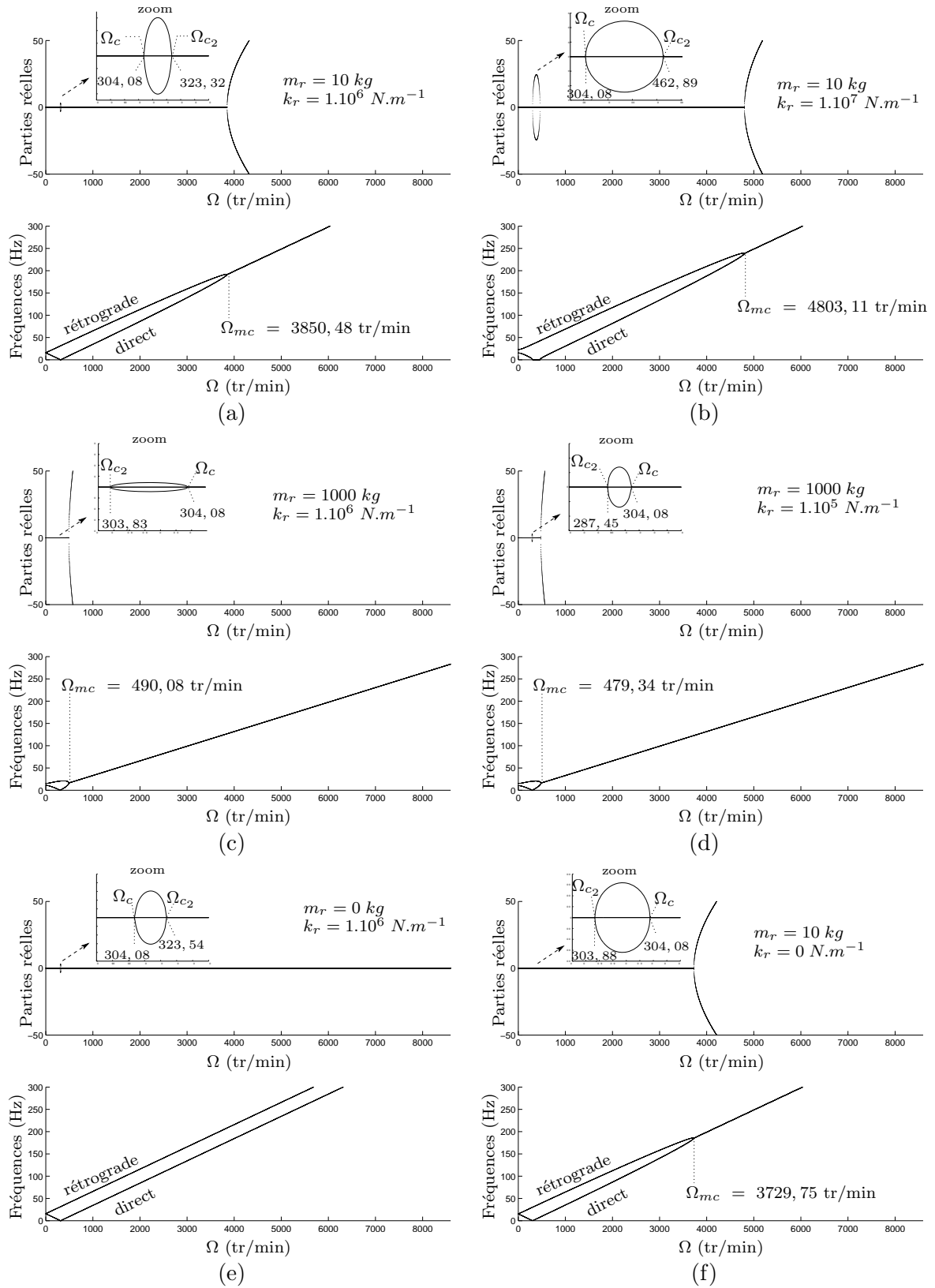


FIG. 5.6 – Analyse de stabilité du mode à trois diamètres nodaux du stator excité par une poutre radiale tournante avec  $m_r < 2M_{stat}$ , (a)  $\omega_r = 3019,75 \text{ tr/min} > 304,08 \text{ tr/min} = \Omega_c$ , (b)  $\omega_r = 3549,29 \text{ tr/min} > \Omega_c$ , (c)  $\omega_r = 301,97 \text{ tr/min} < \Omega_c$ , (d)  $\omega_r = 95,49 \text{ tr/min} < \Omega_c$

La figure 5.6 représente l'analyse de stabilité du mode à trois diamètres nodaux du stator excité par une aube tournante ayant une faible masse par rapport à celle de l'anneau c'est-à-dire  $m_r < 2M_{stat}$ . En comparant les figures 5.6 (a), (b), (c) et (d), il apparaît qu'une augmentation de la raideur en traction/compression de la poutre résulte bien en une augmentation de la vitesse critique  $\Omega_{c2}$ . Ceci repousse également la vitesse critique de couplage de mode  $\Omega_{mc}$ . Une augmentation de la masse de la poutre aura quant à elle pour conséquence de diminuer ces deux vitesses critiques. De plus, lorsque  $\omega_r < \Omega_c$ , le stator ne diverge plus à partir de  $\Omega_c$ , qui est intrinsèque à l'anneau pour un mode donné mais, à partir de  $\Omega_{c2}$  qui est alors inférieure à  $\Omega_c$ . Les deux dernières figures 5.6 (e) et (f), montrent que si la masse tend vers zéro alors, la vitesse critique de couplage de mode est repoussée à l'infini et donc que le système ne peut pas flotter. Enfin, une raideur nulle conservera les deux types d'instabilité potentielles du système.

Conformément au résultat du critère de Routh-Hurwitz, le système devrait également être instable pour  $\Omega > \Omega_{c3}$  (Cf. équation 5.21) dans le cas où  $m > 2M_{stat}$ . Nous allons donc nous placer dans cette condition, bien que cela ait peu de signification physique. La figure 5.7 représente donc une analyse de stabilité pour le même système que précédemment mais, avec  $m > 2M_{stat}$ . Cependant, aucun nouveau phénomène n'est présent à  $\Omega_{c3} = 787,20$  tr/min. Ceci est dû au fait que l'instabilité de flottement de l'anneau intervient avant  $\Omega_{c3}$  puisque comme nous venons de le voir, plus la masse est élevée, plus  $\Omega_{mc}$  est faible.

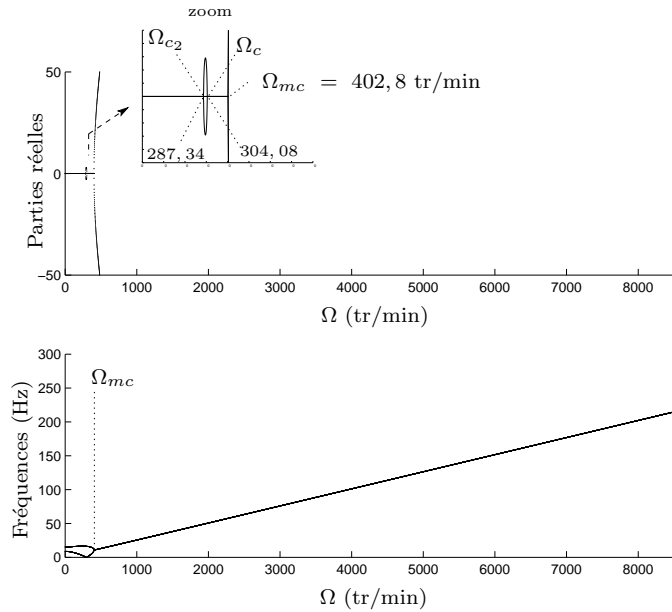


FIG. 5.7 – Analyse de stabilité du mode à trois diamètres nodaux du stator excité par un système masse-ressort radial tournant avec  $m_r = 2000\text{kg}$  ( $m_r > 2M_{stat}$ ) et  $k_r = 1.10^6\text{N.m}^{-1}$

### Influence du nombre d'aubes

Enfin, lors d'un contact entre un rotor flexible aubagé et un carter élastique, il se peut que le contact se produise sur plusieurs aubes simultanément. Il convient donc d'étudier l'influence du nombre d'aubes en contact avec un carter élastique sur la stabilité du système. Pour cette étude, il s'agit du mode à deux diamètres nodaux de l'anneau qui est considéré. Ainsi, les figures 5.8 (a), (b), (c) et (d) représentent une étude de stabilité du mode à deux diamètres nodaux du stator excité respectivement par une charge radiale, deux charges radiales espacées de  $60^\circ$ , trois charges radiales espacées toutes trois de  $60^\circ$  et enfin trois charges radiales dont deux sont diamétralement opposées et la dernière, à  $60^\circ$  par rapport à l'une des deux autres. Ces études ont été faites dans le cas de poutres de paramètres modaux  $m_r = 10 \text{ kg}$  et  $k_r = 1.10^6 \text{ N.m}^{-1}$ . D'une façon générale, il est assez difficile de définir l'influence du nombre de charges sur la stabilité du système. Cependant, dans certaines configurations particulières où les charges ont une répartition symétrique par rapport au mode du stator considéré, il est possible de supprimer la zone de divergence du système entre  $\Omega_c$  et  $\Omega_{c2}$  comme le montre la figure 5.8 (c). En effet, selon le critère de Routh-Hurwitz, une condition suffisante pour que le stator, excité par  $N$  aubes rotatives, ne puisse pas diverger entre  $\Omega_c$  et  $\Omega_{c2}$  est que le coefficient  $C$  soit toujours positif, ce qui s'obtient si :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^N k_{r_j} \sin^2(n\phi_j) = \sum_{j=1}^N k_{r_j} \cos^2(n\phi_j) \\ \sum_{j=1}^N k_{r_j} \sin(n\phi_j) \cos(n\phi_j) = 0 \\ \sum_{j=1}^N m_{r_j} \sin^2(n\phi_j) = \sum_{j=1}^N m_{r_j} \cos^2(n\phi_j) \\ \sum_{j=1}^N m_{r_j} \sin(n\phi_j) \cos(n\phi_j) = 0 \end{array} \right. \quad (5.27)$$

Ainsi, dans le cas de la figure 5.8(c), les quatre conditions sont vérifiées : les trois charges ont les mêmes masses et raideurs et

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin^2\left(2\frac{\pi}{6}\right) + \sin^2\left(2\frac{2\pi}{6}\right) + \sin^2\left(2\frac{3\pi}{6}\right) = \cos^2\left(2\frac{\pi}{6}\right) + \cos^2\left(2\frac{2\pi}{6}\right) + \cos^2\left(2\frac{3\pi}{6}\right) = \frac{3}{2} \\ \sin\left(2\frac{\pi}{6}\right) \cos\left(2\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(2\frac{2\pi}{6}\right) \cos\left(2\frac{2\pi}{6}\right) + \sin\left(2\frac{3\pi}{6}\right) \cos\left(2\frac{3\pi}{6}\right) = 0 \end{array} \right. \quad (5.28)$$

Ce qui n'est pas le cas pour le système correspondant à la figure 5.8 (d) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin^2\left(2\frac{\pi}{6}\right) + \sin^2\left(2\frac{2\pi}{6}\right) + \sin^2\left(2\frac{4\pi}{6}\right) = \frac{9}{4} \text{ alors que } \cos^2\left(2\frac{\pi}{6}\right) + \cos^2\left(2\frac{2\pi}{6}\right) + \cos^2\left(2\frac{4\pi}{6}\right) = \frac{3}{4} \\ \sin\left(2\frac{\pi}{6}\right) \cos\left(2\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(2\frac{2\pi}{6}\right) \cos\left(2\frac{2\pi}{6}\right) + \sin\left(2\frac{4\pi}{6}\right) \cos\left(2\frac{4\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} \neq 0 \end{array} \right. \quad (5.29)$$

Il faut préciser que les conditions 5.27 permettant de supprimer la zone de divergence de l'anneau ne peuvent bien sûr pas toujours être réalisables. Par exemple, il n'est pas possible de trouver une configuration de contact avec des aubes espacées les unes des autres de  $60^\circ$  qui supprime la zone de divergence du mode à trois diamètres nodaux de l'anneau.

Ainsi, d'après les études de stabilité réalisées, le contact glissant, c'est-à-dire, sans frottement, entre des aubes rotatives et un carter élastique est suffisant pour déstabiliser le système, si bien sûr le contact est maintenu. Il est alors tout à fait intéressant de valider ces résultats et en même temps, d'étudier le comportement dynamique d'une telle structure dans ces zones d'instabilité. Ceci se fera par l'intermédiaire des méthodes d'analyses non linéaires développées au chapitre 3.

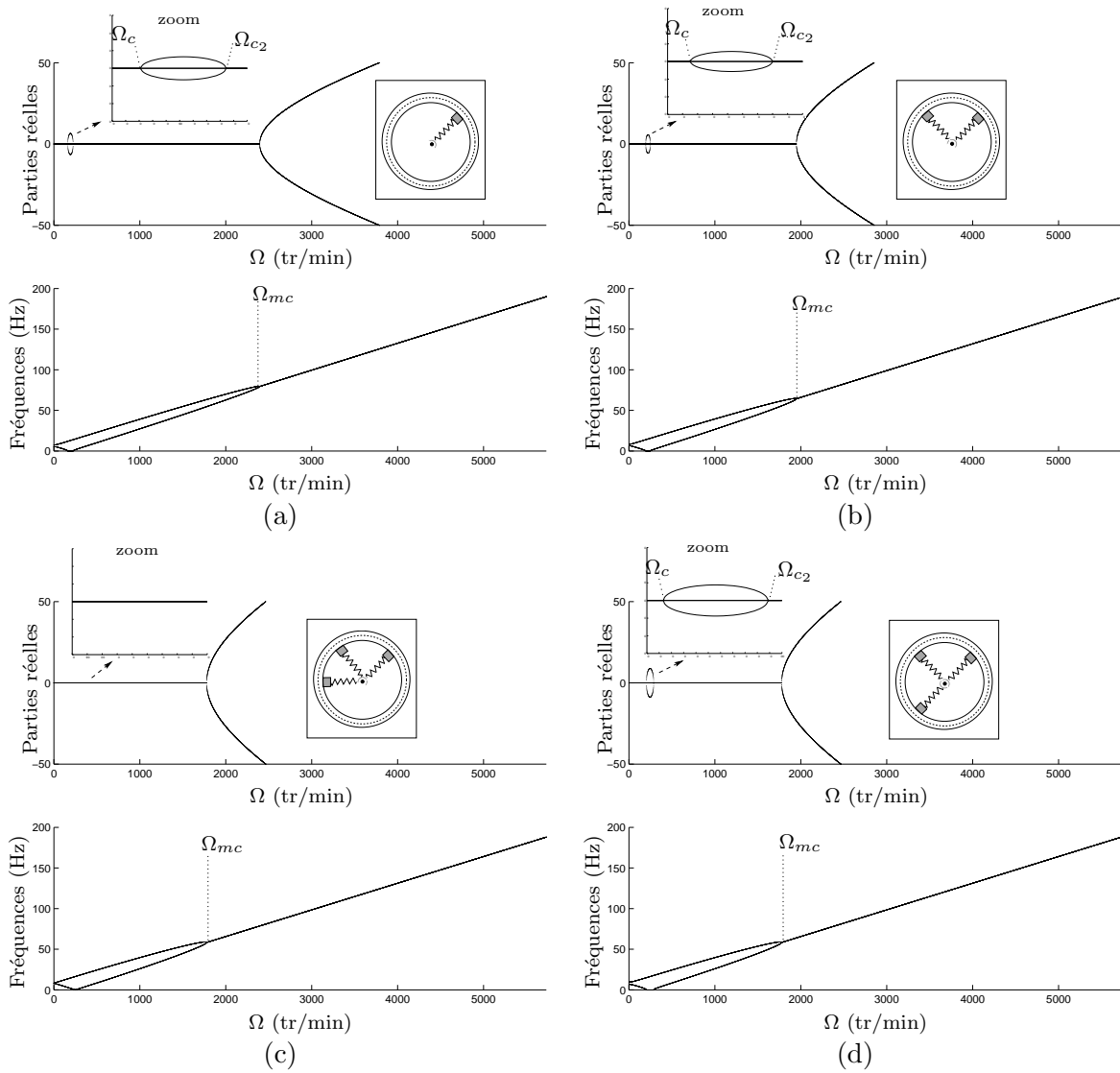


FIG. 5.8 – Analyse de stabilité du mode à deux diamètres nodaux du stator excité par (a) une charge radiale rotative (b) deux charges radiales rotatives, (c) et (d) trois charges radiales rotatives

### 5.1.2.2 Comportement dynamique

Nous avons vu en section 5.1.2.1 qu'un anneau excité par des aubes animées d'une vitesse de rotation et glissant sans frottement sur sa surface interne, pouvait être instable dans certaines plages de vitesse de rotation. Cependant, ces résultats proviennent d'études de stabilité locales de points d'équilibres du système, lui même étant modélisé dans le repère tournant. Compte-tenu de ces résultats, il serait intéressant, toujours en supposant le contact permanent entre les aubes et le carter, de valider les instabilités du système et de vérifier si le système peut adopter des configurations dynamiques. Nous allons, dans cet objectif, réaliser des intégrations temporelles directes pour ce système. Si des solutions périodiques apparaissent, nous utiliserons la méthode de shooting où la méthode de balance harmonique dans la mesure où la fréquence de ces solutions sont connues a priori. Nous implémenterons également une variante de cette dernière méthode s'appuyant sur des considérations de stabilité dans le domaine fréquentiel détaillées au chapitre 4, section 4.7.

Commençons par réaliser des intégrations temporelles directes pour obtenir le comportement dynamique des différents systèmes étudiés en section 5.1.2.1. Par rapport à l'algorithme présenté précédemment, il n'y a pas de phase de correction dans le cas présent puisqu'il n'y a pas de contact possible entre les différentes structures. Un schéma en différences finies centrées est toujours employé. Pour éviter d'avoir des régimes transitoires trop longs, l'anneau est, dans cette partie, amorti c'est-à-dire qu'une fonction d'amortissement proportionnelle à un coefficient d'amortissement visqueux  $\eta_{stat}$  est introduit au modèle :

$$F_{d_{stat}} = \frac{1}{2} \int_{-\Omega t}^{2\pi - \Omega t} \eta_{stat} \frac{E_{stat} I_{stat}}{R_{stat}^3} \left\{ -\Omega \frac{\partial^3 u_s}{\partial \phi^3}(\phi, t) + \frac{\partial^2 \dot{u}_s}{\partial \phi^2}(\phi, t) - \Omega \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2}(\phi, t) + \frac{\partial \dot{w}}{\partial \phi}(\phi, t) \right\}^2 d\phi \quad (5.30)$$

Ceci se traduit, au niveau des études de stabilité réalisées précédemment, par une translation des parties réelles des valeurs propres, associées au stator, vers le bas de l'axe des abscisses dans le plan complexe. Nous allons étudier le comportement dynamique du système dont l'étude de stabilité a été représentée en figure 5.3 c'est-à-dire pour un anneau élastique dont le troisième mode est excité par une aube n'ayant qu'un degré de liberté de traction/compression, glissant sans frottement sur sa face interne.

Tout d'abord, plaçons nous à un régime stable d'après la figure 5.3. La figure 5.9 représente le comportement dynamique du système à des vitesses de rotation de l'aube de  $\Omega = 286,5$  tr/min (Cf. figure 5.9 (a)) et  $\Omega = 668,5$  tr/min (Cf. figure 5.9 (b)) c'est-à-dire, à des régimes respectivement inférieurs à la plage de divergence de l'anneau et, compris entre cette plage et la vitesse de couplage de modes. Il apparaît que, comme prévu par les études de stabilité, le système est parfaitement stable à ces vitesses et adopte une position statique, dans le repère tournant.

Dans ces régimes où le système linéaire est stable, il peut être intéressant d'étudier l'évolution des amplitudes de réponse de l'anneau en fonction de son chargement. La figure 5.10 représente le déplacement du mode à trois diamètres nodaux de l'anneau en un de ses points, au cours



du temps, pour différentes dispositions d'aubes ne possédant qu'un degré de liberté de traction/compression, tournant à  $\Omega = 286,5$  tr/min. Il apparaît ainsi que lorsque le chargement est géométriquement compatible avec le mode d'anneau considéré, les amplitudes de réponse de celui-ci sont maximales. En effet, dans ce cas, les forces généralisées, proportionnelles à  $\sum_{j=1}^N m_{r_j} \Omega^2 R_{stat} n \sin(n\phi_j)$  et  $\sum_{j=1}^N m_{r_j} \Omega^2 R_{stat} n \cos(n\phi_j)$  (Cf. annexe A), agissant sur l'anneau, sont maximales.

Etudions maintenant la dynamique du système dans sa plage de divergence et dans sa plage de flottement. Il se trouve que pour des vitesses de rotation comprises entre  $\Omega_c$  et  $\Omega_{c2}$  ou, supérieures à  $\Omega_{mc}$ , les oscillations de l'anneau croissent exponentiellement dans le temps, comme le montrent respectivement les figures 5.11 (a) et (b). Plus précisément, il peut être constaté sur la figure 5.11 (a) que ces amplitudes croissent brutalement sans fréquence apparente dans le repère tournant. Ce régime peut donc effectivement être considéré comme une divergence de l'anneau, dans ce même repère, comme le prévoyaient les études de stabilité. De même, lorsque  $\Omega > \Omega_{mc}$ , les amplitudes de l'anneau croissent elles aussi, mais avec une pulsation d'oscillation non nulle, proche de la partie imaginaire associée à la valeur propre de partie réelle positive, à cette vitesse de rotation, dont l'évolution est représentée sur la figure 5.3. Cette instabilité est donc de type flottement.

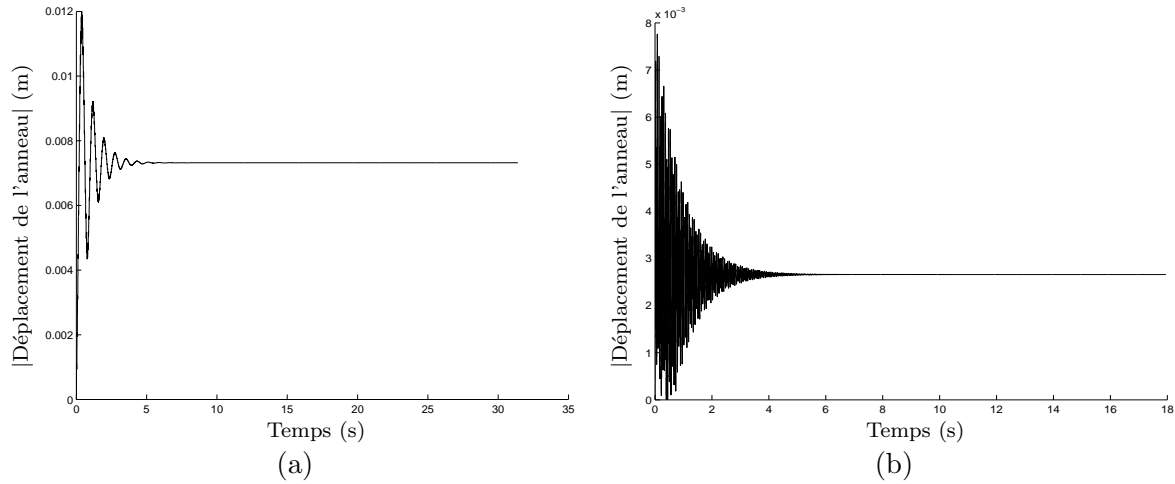


FIG. 5.9 – Evolution de la norme du déplacement du mode à trois diamètres nodaux de l'anneau en un point, en fonction du temps, à : (a)  $\Omega = 286,5$  tr/min et (b)  $\Omega = 668,5$  tr/min

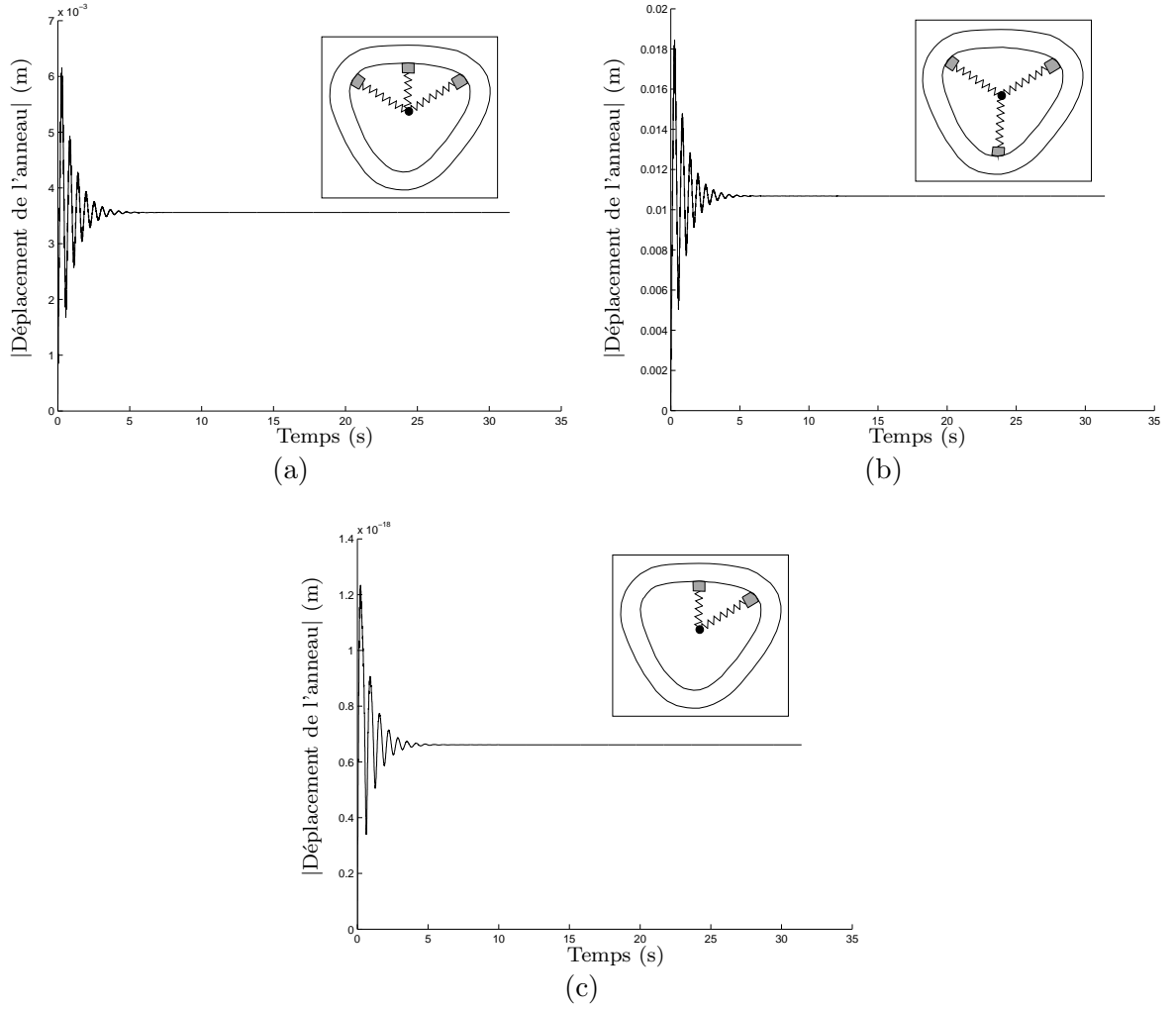


FIG. 5.10 – Déplacements du mode à trois diamètres nodaux de l’anneau excité par (a) trois aubes espacées de  $60^\circ$ , (b) trois aubes distantes de  $120^\circ$  et (c) deux aubes distantes de  $60^\circ$ , tournant à  $\Omega = 286,5$  tr/min

Pour prendre en compte les non linéarités naturelles liées aux grands déplacements du système, des raideurs proportionnelles au cube des déplacements de l’anneau sont introduites dans le modèle. Celui-ci peut alors être représenté par la figure 5.12. La force associée à ces raideurs est donc de la forme :

$$F_{NL}(\phi, t) = k_{NL} \times u_s^3(\phi, t) \quad (5.31)$$

Celle-ci va rigidifier le stator au fur et à mesure que ses déplacements croissent. Afin d’avoir une idée de l’influence de cette non linéarité (où  $k_{NL} = 1.10^5 \text{ N.m}^{-1}$ ) sur le stator, la courbe de réponse du mode à trois diamètres nodaux de ce dernier, excité par une poutre de même paramètres que la figure 5.11, en rotation à  $\Omega$ , est tracée sur la figure 5.13. Cette réponse présente un retournement caractéristique d’un système non linéaire. Une méthode de balance harmonique couplée à une continuation utilisant un prédicteur de type tangente et un correcteur de type Moore-Penrose a été employée pour obtenir cette courbe. Des simulations temporelles du comportement dynamique de ce système, à des vitesses de rotation pour lesquelles il présentait

des amplitudes de vibration irréalistes sont alors réalisées. La figure 5.14 (a) représente ainsi le comportement du système à  $\Omega = 310$  tr/min et la figure 5.14 (b), à  $\Omega = 4774,5$  tr/min. Dans le premier cas c'est-à-dire là où le système linéaire divergeait, le système non linéaire adopte une configuration statique. Dans le second cas, là où le système linéaire flottait, le système non linéaire est animé d'un comportement vibratoire avec des amplitudes admissibles. La réponse du système non linéaire étant périodique à partir de  $\Omega_{mc}$ , son comportement peut être étudié grâce aux méthodes de balance harmonique et de shooting.

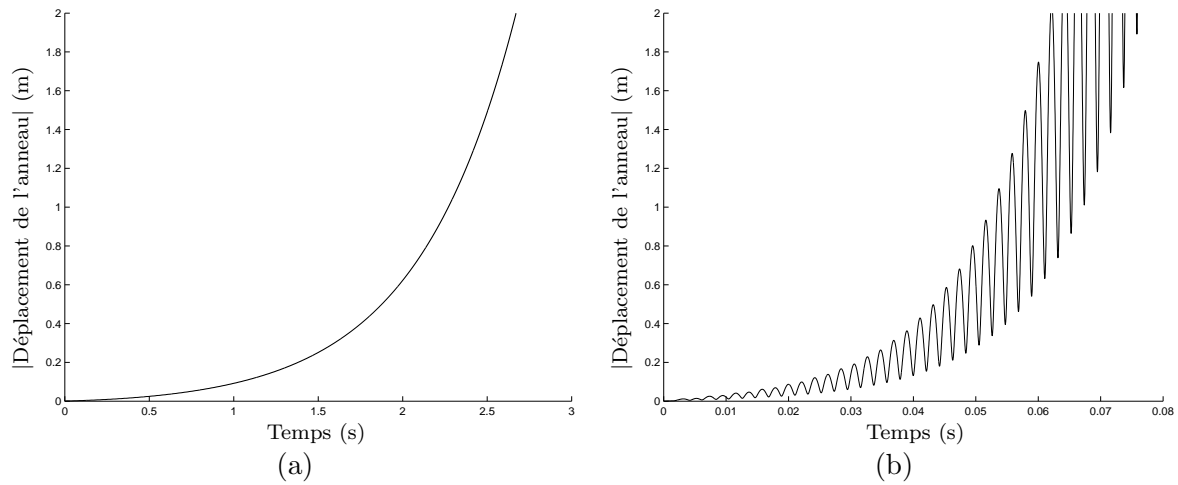


FIG. 5.11 – Evolution de la norme du déplacement du mode à trois diamètres nodaux de l'anneau en un point, en fonction du temps, à : (a)  $\Omega = 310$  tr/min et (b),  $\Omega = 4774,5$  tr/min

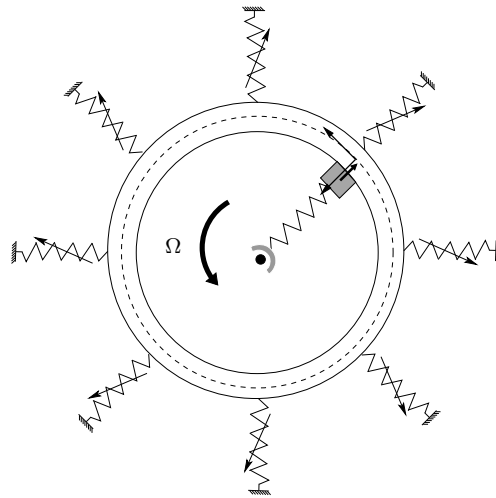


FIG. 5.12 – Modèle d'anneau élastique non linéaire

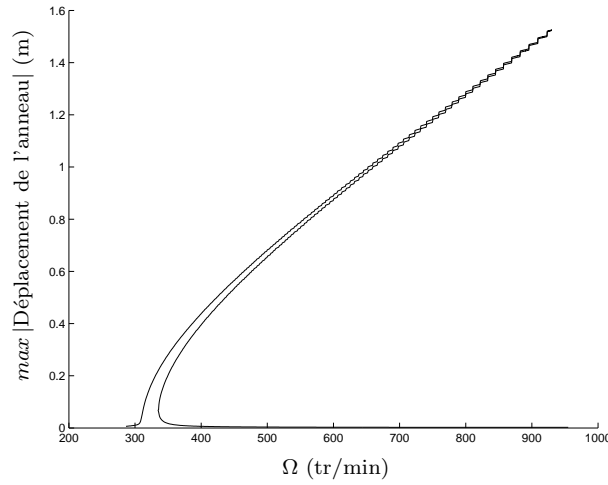
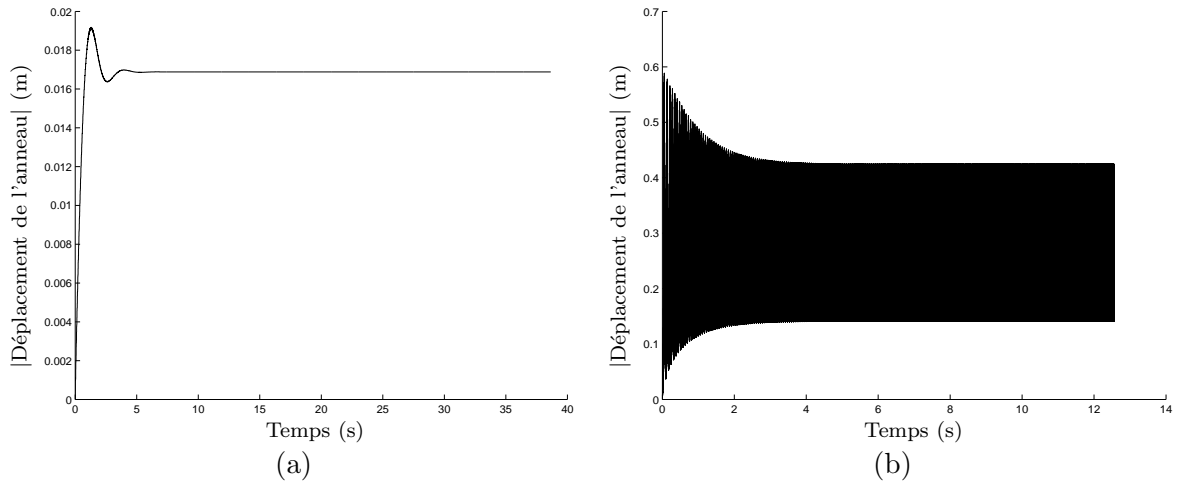


FIG. 5.13 – Réponse de l'anneau élastique non linéaire excité par une poutre en rotation

FIG. 5.14 – Evolution de la norme du déplacement du mode à trois diamètres nodaux de l'anneau non linéaire en un point, en fonction du temps, à (a)  $\Omega = 310$  tr/min et (b)  $\Omega = 4774,5$  tr/min

Tout d'abord, une méthode de shooting est appliquée à ce système dont les seules forces non linéaires sont celles dues aux raideurs cubiques puisque le contact entre l'aube et l'anneau est supposé permanent. L'initialisation de cette méthode est le résultat de l'intégration temporelle de ce système réalisée à  $\Omega = 4774,5$  tr/min et représenté sur la figure 5.14 (b). Une prédiction de type tangente est réalisée et l'état du système est déterminé jusqu'à  $\Omega = 5729,5$  tr/min. Une intégration temporelle directe est alors réalisée à cette même vitesse de rotation pour valider le résultat de la méthode de shooting. Les résultats sont représentés sur la figure 5.15. Sur la figure 5.15 (a) sont représentés les comportements vibratoires du système à  $\Omega = 4774,5$  tr/min, correspondant à l'initialisation de l'algorithme de shooting, et à  $\Omega = 5729,5$  tr/min, correspondant au dernier résultat de cet algorithme. Il apparaît que les résultats de l'intégration

directe à cette dernière vitesse et ceux provenant de la méthode de shooting sont très proches l'un de l'autre et ce, bien que l'état initial soit sensiblement différent en amplitude comme en fréquence. Celle-ci est d'ailleurs représentée, en fonction de la vitesse de rotation de l'aube, sur la figure 5.15 (b). Sur celle-ci, les traits pleins représentent les parties imaginaires des valeurs propres du problème aux valeurs propres résolu lors de l'étude de la stabilité du système (Cf. figure 5.3). On peut ainsi constater que les fréquences obtenues par ces deux méthodes sont également très proches (moins de 0,4 % d'écart). Ceci atteste donc du bon fonctionnement de la méthode de shooting dans ce cas où le modèle possède peu de degrés de liberté et que les non linéarités impliquées ne sont pas trop fortes. Nous verrons par la suite que dans le cas contraire, cette méthode n'est pas adaptée.

Enfin, la stabilité du régime périodique à  $\Omega = 5729,5$  tr/min est un sous produit de cette méthode et peut donc être très facilement étudiée. Les valeurs propres de la matrice monodrome sont les suivantes :

valeurs propres $\rho_m$	$\ \rho_m\ $
$0.8502 + 0.5082i$	0.9905
$0.8502 - 0.5082i$	0.9905
1.0004	1.0004
0.9422	0.9422

TAB. 5.1 – Valeurs propres de la matrice monodrome du système non linéaire à  $\Omega = 5729,5$  tr/min

Ces valeurs propres sont toutes, sauf une, à l'intérieur du cercle unité. On peut donc en conclure que cette solution périodique est stable. Cette fois-ci, le système étant autonome, il y a un multiplicateur de Lagrange sur le cercle unité (aux erreurs numériques près provenant des estimations de la jacobienne des forces qui se fait par différences finies).

On peut également constater sur la figure 5.15 (b) que l'évolution de la fréquence de réponse du système vérifie  $f = \frac{n\Omega}{2\pi}$ , c'est-à-dire que celle-ci peut être déterminée a priori. Il est donc possible, dans ce cas précis, d'appliquer une méthode de balance harmonique à ce système dont la pulsation est désormais connue en fonction de  $\Omega$ . Nous allons suivre la même procédure que précédemment : nous allons réaliser une continuation à partir de la solution d'une intégration temporelle directe du système à  $\Omega = 4774,5$  tr/min. A  $\Omega = 5729,5$  tr/min, la solution obtenue par la méthode de la balance harmonique, tronquée à l'ordre 2, fournit les résultats représentés sur la figure 5.16 (a). Celle-ci compare les résultats de la balance harmonique couplée à une continuation et ceux d'une intégration directe à la vitesse de rotation  $\Omega = 5729,5$  tr/min. L'évolution de ce système étant assez régulière, il n'y a pas besoin d'un prédictor évolué. L'initialisation du solveur non linéaire employé pour résoudre le système 3.32 à chaque valeur de  $\Omega$  est le résultat du calcul précédent. La figure 5.16 (a) montre une très bonne similitude entre les résultats provenant de l'intégration directe et ceux de la HBM.

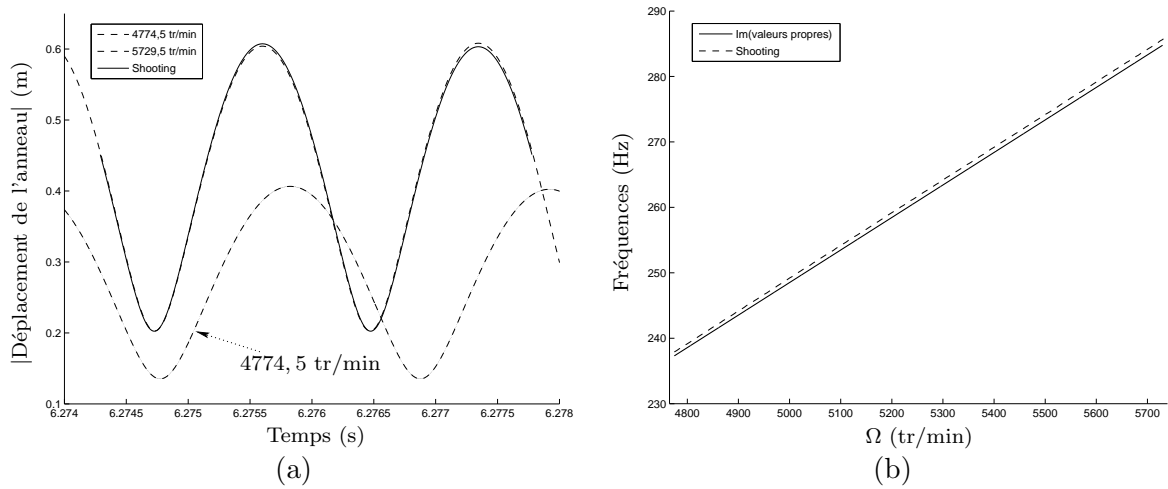


FIG. 5.15 – (a) Comportement du système non linéaire à  $\Omega = 4774,5$  tr/min et  $\Omega = 5729,5$  tr/min obtenu par intégration directe et par shooting, (b) évolution des fréquences du système en fonction de  $\Omega$ , obtenue par intégration directe et par shooting

Dans cette procédure, la pulsation de la réponse du système à chaque nouvelle valeur du paramètre  $\Omega$  est connue et donc fixée. Par contre, il est rare que la fréquence de réponse d'un système non linéaire soit proche de celle du système linéaire et connue a priori. Dans le cas où elle est inconnue, nous allons voir comment, toujours selon une procédure d'équilibrage des termes harmoniques, il est possible de faire évoluer la pulsation de la réponse du système à mesure que  $\Omega$  varie. Pour cela, une optimisation sous contraintes est réalisée. Nous avons vu en section 4.7 que la stabilité d'une solution périodique pouvait être déduite de l'étude des valeurs propres du problème aux valeurs propres généralisé décrit par l'équation 4.61. Ainsi, une procédure que l'on notera 2SHBM (Stability Seeking Harmonic Balance Method) dans la suite, consiste à équilibrer les termes harmoniques résultant du développement en série de Fourier tronquée de la solution (c'est-à-dire qu'il faut résoudre le système 3.32 qui constitue la contrainte de notre problème) puis, à optimiser la solution de telle sorte que la plus grande des valeurs propres du problème 4.61 soit négative (c'est-à-dire qu'il faut que la solution trouvée soit stable). Les résultats de cette méthode, réalisée selon la même procédure de continuation que la HBM, à la différence près que la période de la solution n'est pas imposée à chaque nouvelle valeur de  $\Omega$ , mais déterminée suite à l'optimisation des parties réelles des valeurs propres du système, sont représentés sur la figure 5.16 (b). Dans ce cas simple où le système possède peu de degrés de liberté, cette méthode semble donner des résultats très satisfaisants.

Ainsi, cette étude du comportement dynamique du premier modèle phénoménologique d'interaction rotor/stator sans frottement a validé les résultats des études de stabilité. Des régimes périodiques ont été révélés dans le cas d'un carter non linéaire. Dans ce premier cas simple, les méthodes non linéaires développées au chapitre 3 ont donné des résultats très satisfaisants, validant à leur tour les résultats des intégrations temporelles directes.

Les phénomènes intervenant lors du contact glissant, sans frottement, entre des aubes

tournantes et un anneau élastique étant désormais identifiés, validés et compris, il est alors envisageable d'étudier l'influence du frottement sur un tel système.

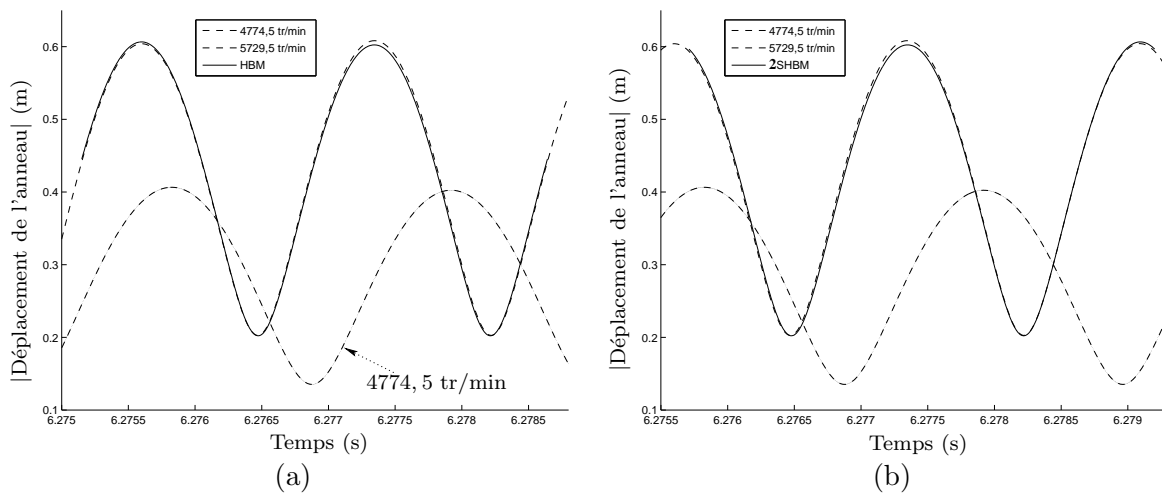


FIG. 5.16 – Comportement du système non linéaire à  $\Omega = 4774,5$  tr/min et  $\Omega = 5729,5$  tr/min obtenu par intégration directe et (a) par HBM, (b) par 2SHBM

### 5.1.3 Contact frottant

Nous allons dans cette partie considérer le système complet, représenté en figure 5.1, constitué de l'anneau élastique excité par une ou plusieurs poutres rotatives frottant sur sa surface interne. Bien que ces poutres possèdent deux degrés de liberté, nous allons, toujours dans un souci de simplicité et de compréhension des phénomènes, étudier séparément l'influence de chacun de ceux-ci. Ainsi, dans un premier temps, des poutres ne possédant qu'un degré de liberté de traction/compression seront considérées. Cela permettra une comparaison avec la section précédente et mettra donc en avant l'influence même du frottement. Ensuite, seul un degré de liberté de flexion sera alloué aux poutres et enfin, le système complet sera étudié, toujours en considérant les poutres orthogonales à la surface interne de l'anneau. L'influence d'un angle d'inclinaison entre celles-ci et la normale à la surface interne du carter sera étudiée en dernier lieu. Comme précédemment, des études de stabilité précéderont les études de comportements dynamiques.

#### 5.1.3.1 Études de stabilité

Les études de stabilité consistent, comme en section 5.1.2.1, à déterminer les solutions de l'équation 5.12. L'anneau ici considéré est de nouveau non amorti et linéaire. La stabilité du système va être étudiée par étapes, comme il vient d'être précisé.

### Poutres ne possédant qu'un degré de liberté de traction/compression

Dans le cas particulier d'une seule poutre frottant contre l'anneau, l'équation matricielle régissant le comportement dynamique du système est la suivante :

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} M_{stat} (n^2 + 1) & -\mu \left\{ 1 + \frac{h}{2R_{stat}} (n^2 - 1) \right\} m_r n \\ 0 & M_{stat} (n^2 + 1) + m_r n^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{A}_n \\ \ddot{B}_n \end{Bmatrix} \\
 & + \begin{bmatrix} 0 & -2M_{stat} n \Omega (n^2 + 1) \\ 2M_{stat} n \Omega (n^2 + 1) & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{A}_n \\ \dot{B}_n \end{Bmatrix} \\
 & + \begin{bmatrix} K_{stat} n^2 (n^2 - 1)^2 & -\mu \left\{ 1 + \frac{h}{2R_{stat}} (n^2 - 1) \right\} (k_r - m_r \Omega^2) n \\ -M_{stat} n^2 \Omega^2 (n^2 + 1) & K_{stat} n^2 (n^2 - 1)^2 \\ 0 & -M_{stat} n^2 \Omega^2 (n^2 + 1) \\ & + (k_r - m_r \Omega^2) n^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_n \\ B_n \end{Bmatrix} \\
 & = \begin{Bmatrix} \mu \left\{ 1 + \frac{h}{2R_{stat}} (n^2 - 1) \right\} (m_r \Omega^2 R_{stat} + N_U) \\ -m_r R_{stat} \Omega^2 n \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \tag{5.32}$$

Celle-ci peut être comparée à l'équation 5.13 dans le cas d'un contact glissant. Cette fois-ci, il est évident que le frottement rend les matrices de masse et de raideur non symétriques à cause des termes proportionnels à  $\mu$ . Ceci est connu comme étant caractéristique d'un système potentiellement instable. Cela peut être confirmé en appliquant une nouvelle fois le critère de Routh-Hurwitz au polynôme caractéristique associé à ce système :

$$P(s) = As^4 + Bs^3 + Cs^2 + Ds + E \tag{5.33}$$

avec

$$A = [M_{stat} (n^2 + 1)]^2 + M_{stat} (n^2 + 1) n^2 m_r \tag{5.34}$$

$$B = \left\{ 1 + \frac{h}{2R_{stat}} (n^2 - 1) \right\} \mu m_r 2M_{stat} n^2 (n^2 + 1) \Omega \tag{5.35}$$

$$\begin{aligned}
 C = & K_{stat} n^2 (n^2 - 1)^2 [2M_{stat} (n^2 + 1) + n^2 m_r] \\
 & + M_{stat} n^2 \Omega^2 (n^2 + 1)^2 [2M_{stat} - m_r] + M_{stat} (n^2 + 1) n^2 k_r
 \end{aligned} \tag{5.36}$$

$$D = \left\{ 1 + \frac{h}{2R_{stat}} (n^2 - 1) \right\} [k_r - m_r \Omega^2] \mu 2M_{stat} n^2 (n^2 + 1) \Omega \tag{5.37}$$

$$\begin{aligned}
 E = & [-M_{stat} n^2 \Omega^2 (n^2 + 1) + K_{stat} n^2 (n^2 - 1)^2] \\
 & \times [-n^2 \Omega^2 (M_{stat} (n^2 + 1) + m_r) + K_{stat} n^2 (n^2 - 1)^2 + n^2 k_r]
 \end{aligned} \tag{5.38}$$



Selon ce critère, le polynôme  $P(s)$  aura toutes ses racines possédant des parties réelles négatives si les termes  $A$ ,  $B$ ,  $(BC - AD)/B$ ,  $((BC - AD)D - B^2E)/(BC - AD)$  et  $E$  ont le même signe. Chaque changement de signe de l'un d'entre eux implique qu'une de ses racines franchit l'axe imaginaire du plan complexe c'est-à-dire que sa partie réelle devient positive, traduisant ainsi l'instabilité du système. Étudions donc le signe de chacun de ces termes.

Il est évident que  $A$  et  $B$  sont toujours positifs.

Concernant le terme  $(BC - AD)/B$  :

- Si  $M_{stat}(n^2 + 1)(1 + 2n^2) > m_r n^4$ , il est positif si  $\Omega^2 > \Omega_{c4}^2$  avec :

$$\Omega_{c4}^2 = \omega_r^2 \frac{M_{stat}(n^2 + 1)}{[M_{stat}(n^2 + 1)(1 + 2n^2) - m_r n^4]} - \Omega_c^2 \frac{n^2 [m_r n^2 + 2M_{stat}(n^2 + 1)]}{[M_{stat}(n^2 + 1)(1 + 2n^2) - m_r n^4]} \quad (5.39)$$

à condition que  $\omega_r^2 > \Omega_c^2 \frac{n^2 [m_r n^2 + 2M_{stat}(n^2 + 1)]}{M_{stat}(n^2 + 1)}$ , sans quoi  $\Omega_{c4} = 0$ .

- Si  $M_{stat}(n^2 + 1)(1 + 2n^2) < m_r n^4$ , il est négatif si  $\Omega^2 > \Omega_{c4}^2$ , à condition que  $\omega_r^2 < \Omega_c^2 \frac{n^2 [m_r n^2 + 2M_{stat}(n^2 + 1)]}{M_{stat}(n^2 + 1)}$ , sans quoi  $\Omega_{c4} = 0$ .

Concernant le terme  $((BC - AD)D - B^2E)/(BC - AD)$  :

- Si  $\omega_r^2 > \Omega_c^2 \frac{n^2 [m_r n^2 + 2M_{stat}(n^2 + 1)]}{M_{stat}(n^2 + 1)}$  :

- le numérateur est positif si  $\Omega_{c51}^2 < \Omega^2 < \Omega_{c52}^2$ , avec :

$$\begin{aligned} \Omega_{c51}^2 &= \frac{-[2\omega_r^2(n^2 + 1) + 2\Omega_c^2 n^2(n^2 - 1)] + 4n^2 \Omega_c^2 \sqrt{(n^2 + 1)\omega_r^2 - n^2 \Omega_c^2}}{-2(n^2 + 1)^2} \\ \Omega_{c52}^2 &= \frac{-[2\omega_r^2(n^2 + 1) + 2\Omega_c^2 n^2(n^2 - 1)] - 4n^2 \Omega_c^2 \sqrt{(n^2 + 1)\omega_r^2 - n^2 \Omega_c^2}}{-2(n^2 + 1)^2} \end{aligned} \quad (5.40)$$

à condition que  $-[2\omega_r^2(n^2 + 1) + 2\Omega_c^2 n^2(n^2 - 1)] + 4n^2 \Omega_c^2 \sqrt{(n^2 + 1)\omega_r^2 - n^2 \Omega_c^2} < 0$ , sans quoi il est positif si  $0 < \Omega^2 < \Omega_{c52}^2$ .

- le dénominateur est positif si  $\Omega_c^2 > \Omega_{c4}^2$  à condition que  $M_{stat}(n^2 + 1)(1 + 2n^2) > m_r n^4$ , sans quoi il est toujours négatif.
- Si  $\Omega_c^2 \frac{n^2 [m_r n^2 + 2M_{stat}(n^2 + 1)]}{M_{stat}(n^2 + 1)} > \omega_r^2 > \Omega_c^2 \frac{n^2}{(n^2 + 1)}$  :
- le numérateur est positif si  $\Omega_{c51}^2 < \Omega^2 < \Omega_{c52}^2$  et  $-[2\omega_r^2(n^2 + 1) + 2\Omega_c^2 n^2(n^2 - 1)] + 4n^2 \Omega_c^2 \sqrt{(n^2 + 1)\omega_r^2 - n^2 \Omega_c^2} < 0$ , sans quoi il est positif si  $0 < \Omega^2 < \Omega_{c52}^2$ .
- le dénominateur est négatif si  $\Omega_c^2 > \Omega_{c4}^2$  à condition que  $M_{stat}(n^2 + 1)(1 + 2n^2) < m_r n^4$ , sans quoi il est toujours positif.

- Si  $\Omega_c^2 \frac{n^2}{(n^2+1)} > \omega_r^2$ , le numérateur est toujours négatif. Le signe du dénominateur varie comme indiqué au cas précédent.

Le dernier terme,  $E$ , est négatif entre  $\Omega_c$  et  $\Omega_{c_2}$ , comme dans le cas sans frottement.

On peut d'ailleurs remarquer que par rapport à ce cas précis, le frottement ne fait que rajouter au polynôme caractéristique 5.14 des coefficients non nuls devant les termes  $s^3$  et  $s$ , les coefficients en facteurs des termes  $s^4$ ,  $s^2$  et  $s^0$  étant les mêmes avec ou sans frottement. Il n'est donc pas surprenant de retrouver les phénomènes d'instabilité observés dans le cas glissant.

Ainsi, d'après le critère de Routh-Hurwitz, ce système, dont l'anneau ne possède pas d'amortissement, sera quasiment toujours instable. En fait, tous les termes dont nous venons d'étudier le signe pourront éventuellement être tous positifs uniquement dans une plage de vitesse de rotation comprise entre  $\Omega_{c_{5_1}}$  et  $\Omega_{c_{5_2}}$ , dans le cas d'une poutre de masse faible (par rapport à celle de l'anneau) c'est-à-dire telle que  $m_r n^4 < M_{stat} (n^2 + 1) (1 + 2n^2)$  et de raideur en traction/compression telle que  $\omega_r^2 > \Omega_c^2 \frac{n^2}{(n^2+1)}$ .

Les effets d'une raideur pure et ceux d'une masse pure frottant sur l'anneau peuvent être dissociés. Nous allons donc considérer dans un premier temps une raideur pure frottant contre l'anneau puis, une masse pure et enfin, une poutre complète.

Considérons donc une **raideur pure** frottant sur le stator. La figure 5.17 représente l'analyse de stabilité de ce système avec deux coefficients de frottement  $\mu$  différents :  $\mu = 0.01$  pour les figures 5.17 (a) et (c), 5.17 (c) étant un zoom de la figure 5.17 (a) sur l'évolution des parties réelles et,  $\mu = 0.1$  pour les figures 5.17 (b) et (d) (5.17 (d) étant également un zoom de 5.17 (b)). Comme nous l'avons envisagé, il se produit une divergence du mode direct de l'anneau entre  $\Omega_c$  et  $\Omega_{c_2}$ . De plus, comme dans le cas sans frottement, l'absence de masse implique qu'il ne peut pas y avoir de couplage de modes de l'anneau. Les figures 5.17 (a) et (c) sont ainsi très proches de la figure 5.6 (e). Par contre, en observant un zoom sur l'évolution des parties réelles (Cf. figures 5.17 (b) et (d)), on constate que dès que la raideur se met à tourner et à frotter contre l'anneau, le mode rétrograde de celui-ci est instable. Ainsi, conformément aux conclusions du critère de Routh-Hurwitz, ce système est instable à cause du frottement dès que la vitesse de rotation de la charge est non nulle. Cet effet déstabilisant du frottement sur le mode rétrograde d'un carter est relativement connu et a notamment été mis en évidence sur un modèle modal de turbine excité par du frottement [28]. Les figures 5.17 montrent également que plus le coefficient de frottement augmente, plus le gradient des parties réelles augmente avec la vitesse de rotation.

Le cas d'une **masse pure** frottant contre le carter va maintenant être considéré. La figure 5.18 représente l'étude de stabilité associée à ce système. Comme dans le cas sans frottement (Cf. figure 5.6 (f)), le système subit une divergence du mode direct entre  $\Omega_{c_2}$  et  $\Omega_c$  ainsi qu'un couplage de modes. Un zoom sur l'évolution des parties réelles (Cf. figures 5.18 (b) et (d)) montre que cette fois-ci, il s'agit du mode direct de l'anneau qui est déstabilisé dès que la vitesse de rotation est non nulle. Une augmentation du coefficient de frottement à les mêmes

conséquences que dans le cas précédent, à savoir, une augmentation du gradient des parties réelles avec la vitesse de rotation.

Enfin, le cas d'une **poutre complète** possédant un seul degré de liberté de traction/compression est considéré. La figure 5.19 représente l'analyse de stabilité associée à un anneau dont le troisième mode, de pulsation  $\omega_n = 95,53$  rad/s, est excité par une aube ayant un degré de liberté de traction/compression de pulsation  $\omega_r = 100$  rad/s (Cf. figures 5.19 (a) et (b)) ou  $\omega_r = 70,71$  rad/s (Cf. figures 5.19 (c) et (d)) avec  $\mu = 0.01$ . On voit ainsi sur la figure 5.19 (b) qu'il se produit un croisement des parties réelles du système. Ainsi, dès que l'aube se met à tourner et donc à frotter sur le carter, le mode rétrograde est déstabilisé puis, lorsque la vitesse de rotation augmente, les parties réelles associées aux modes direct et rétrograde de l'anneau se croisent jusqu'à ce que le mode direct soit à son tour instable. Ceci est cohérent avec les études séparées des effets d'une raideur pure puis d'une masse pure frottant contre l'anneau. En effet, nous avons vu que dans le premier cas, le mode rétrograde était déstabilisé. Or, à faible vitesse de rotation, la raideur est prépondérante dans le terme  $k_r - m_r \Omega^2$  présent dans la matrice de raideur du système (Cf. équation 5.32). Lorsque la vitesse de rotation augmente, le terme proportionnel à la masse va devenir prépondérant et celle-ci va alors déstabiliser le mode direct comme nous l'avons vu. Ce croisement n'est observable que si  $\omega_r > \omega_n$  comme l'atteste la figure 5.19 (d) sur laquelle il n'y a pas ce croisement. De plus, celui-ci se produit entre les vitesses  $\Omega_{c_{51}}$  et  $\Omega_{c_{52}}$  qui elles mêmes correspondent au franchissement de l'axe des abscisses par une des courbes des parties réelles. Concernant l'influence d'une augmentation du coefficient de frottement, la figure 5.20 représente la même étude de stabilité que les figures 5.19 (a) et (b) mais avec  $\mu = 0.1$  et, il apparaît que l'augmentation de ce dernier a toujours le même effet c'est-à-dire l'augmentation du gradient des parties réelles. Enfin, ces figures montrent que, conformément aux conclusions du critère de Routh-Hurwitz, le système peut être stable malgré le frottement, entre  $\Omega_{c_{51}}$  et  $\Omega_{c_{52}}$ . On peut, pour terminer, remarquer que le coefficient de frottement n'a pas d'influence sur les vitesses remarquables  $\Omega_c$ ,  $\Omega_{c_2}$ ,  $\Omega_{c_{51}}$  et  $\Omega_{c_{52}}$ . De plus, quand  $n \rightarrow \infty$ , ces deux dernières vitesses tendent vers  $\Omega_c$ , qui elle même tend vers l'infini.

### Poutres ne possédant qu'un degré de liberté de flexion

Nous allons maintenant étudier l'influence du degré de liberté de flexion des aubes. Pour cela, nous allons considérer une aube ne possédant que ce degré de liberté de flexion, toujours en contact permanent avec le carter et frottant contre ce dernier. Afin de manipuler des grandeurs modales, ce système peut être représenté par un oscillateur masse-ressort tangent à l'anneau, comme illustré par la figure 5.21. On peut d'ailleurs citer une comparaison des formulations matricielles obtenues en utilisant soit des modèles masse-ressort, soit des poutres d'Euler-Bernoulli [53].

Une étude de stabilité simple de ce système peut se faire comme précédemment en étudiant les racines de son polynôme caractéristique. Dans le cas d'une seule aube, celui-ci s'écrit :

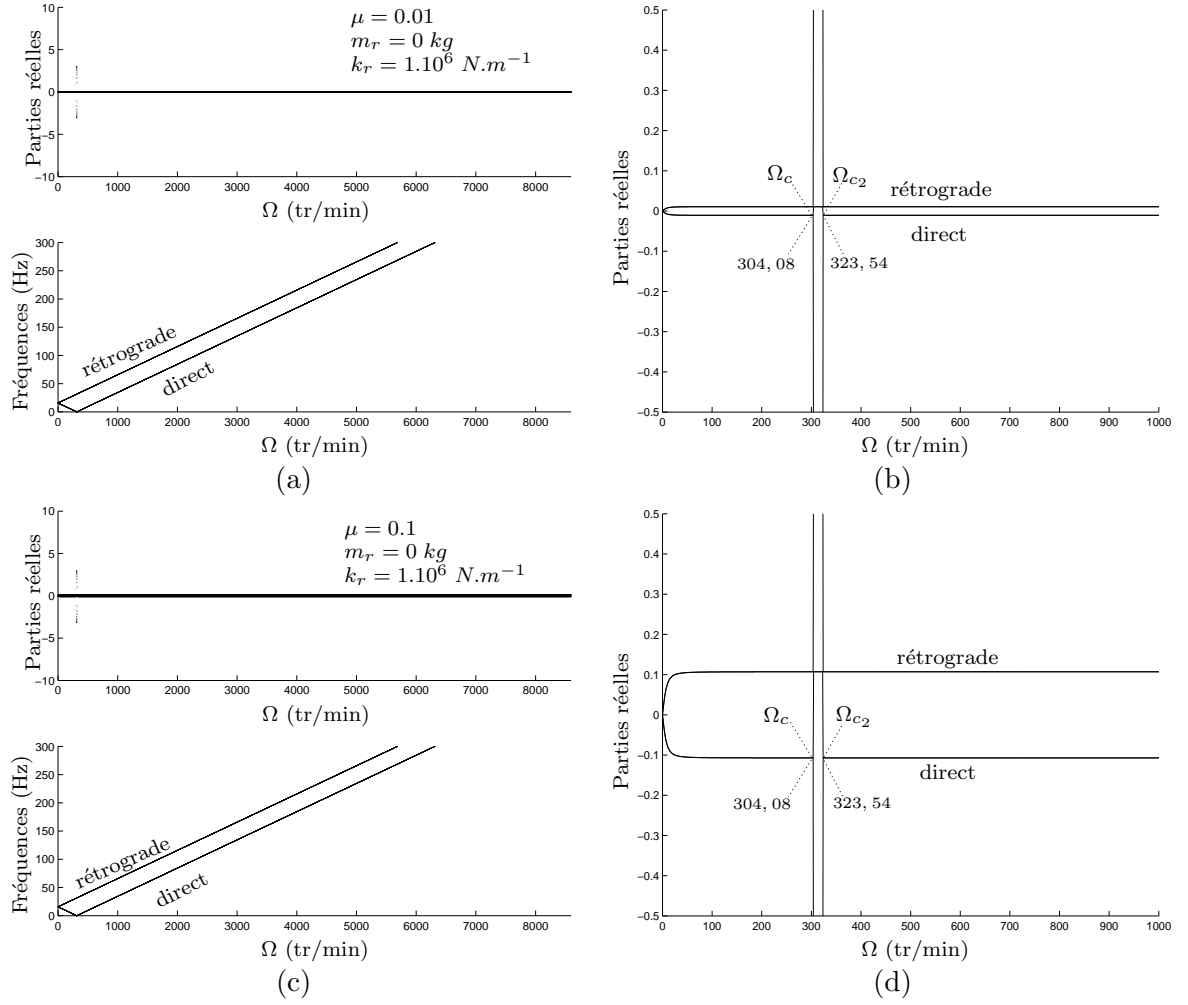


FIG. 5.17 – Analyse de stabilité du mode à trois diamètres nodaux du stator excité par une raideur pure rotative  $k_r = 1.10^6 \text{ N.m}^{-1}$  avec (a)  $\mu = 0.01$  ((b) étant un zoom sur les parties réelles) et (c)  $\mu = 0.1$  ((d) étant un zoom sur les parties réelles)

$$\begin{aligned}
 P(s) = & \left[ s^2 m_t + s \left( 2\mu \rho_b S_b \frac{R_{stat}}{\pi} \Omega \right) + k_t - \left( m_t - \rho_b I_b \frac{\pi^2}{8R_{stat}} \right) \Omega^2 \right] \\
 & \times \left[ \left( s^2 (M_{stat} (n^2 + 1)) + K_{stat} n^2 (n^2 - 1)^2 - M_{stat} n^2 \Omega^2 (n^2 + 1) \right)^2 + s^2 (2M_{stat} n \Omega (n^2 + 1))^2 \right]
 \end{aligned}
 \quad (5.41)$$

avec  $k_t = E_b I_b \frac{\pi^4}{32R_{stat}^3}$  et  $m_t = \rho_b S_b R_{stat} \left( \frac{3}{2} - \frac{4}{\pi} \right) + \rho_b I_b \frac{\pi^2}{8R_{stat}}$ .

Ce polynôme s'exprime par un produit de deux termes. Compte tenu du fait que le premier terme n'implique que les caractéristiques de l'aube, les racines de celui-ci vont nous permettre

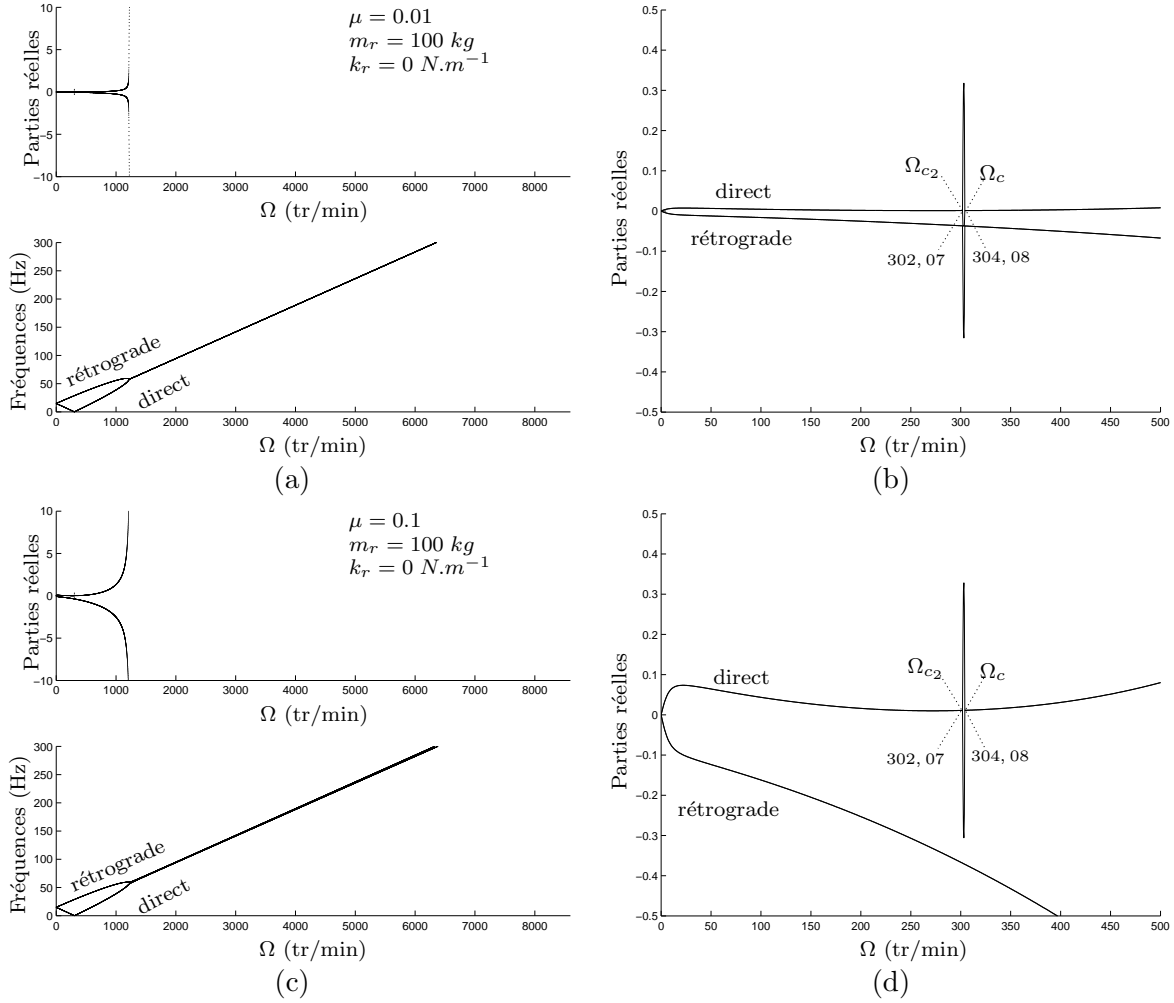


FIG. 5.18 – Analyse de stabilité du mode à trois diamètres nodaux du stator excité par une masse pure rotative  $m_r = 100 \text{ kg}$  avec (a)  $\mu = 0.01$  ((b) étant un zoom sur les parties réelles) et (c)  $\mu = 0.1$  ((d) étant un zoom sur les parties réelles)

de statuer sur sa stabilité. Le discriminant de ce premier membre s'écrit :

$$\Delta = \Omega^2 \left[ \left( 2\mu\rho_b S_b \frac{R_{stat}}{\pi} \right)^2 + 4m_t \left( m_t - \rho_b I_b \frac{\pi^2}{8R_{stat}} \right) \right] - 4m_t k_t \quad (5.42)$$

Nous obtenons alors les propriétés suivantes :

- si  $\Omega^2 < \frac{4m_t k_t}{\left( 2\mu\rho_b S_b \frac{R_{stat}}{\pi} \right)^2 + 4m_t \left( m_t - \rho_b I_b \frac{\pi^2}{8R_{stat}} \right)}$  alors  $\Delta < 0$  et deux racines du polynôme caractéristique 5.41 s'écrivent :

$$s_1 = \frac{-2\mu\rho_b S_b \frac{R_{stat}}{\pi} \Omega + i\sqrt{\Delta}}{2m_t} \quad \text{et} \quad s_2 = \frac{-2\mu\rho_b S_b \frac{R_{stat}}{\pi} \Omega - i\sqrt{\Delta}}{2m_t} \quad (5.43)$$

Les parties réelles de ces racines étant trivialement négatives, la poutre est alors stable.

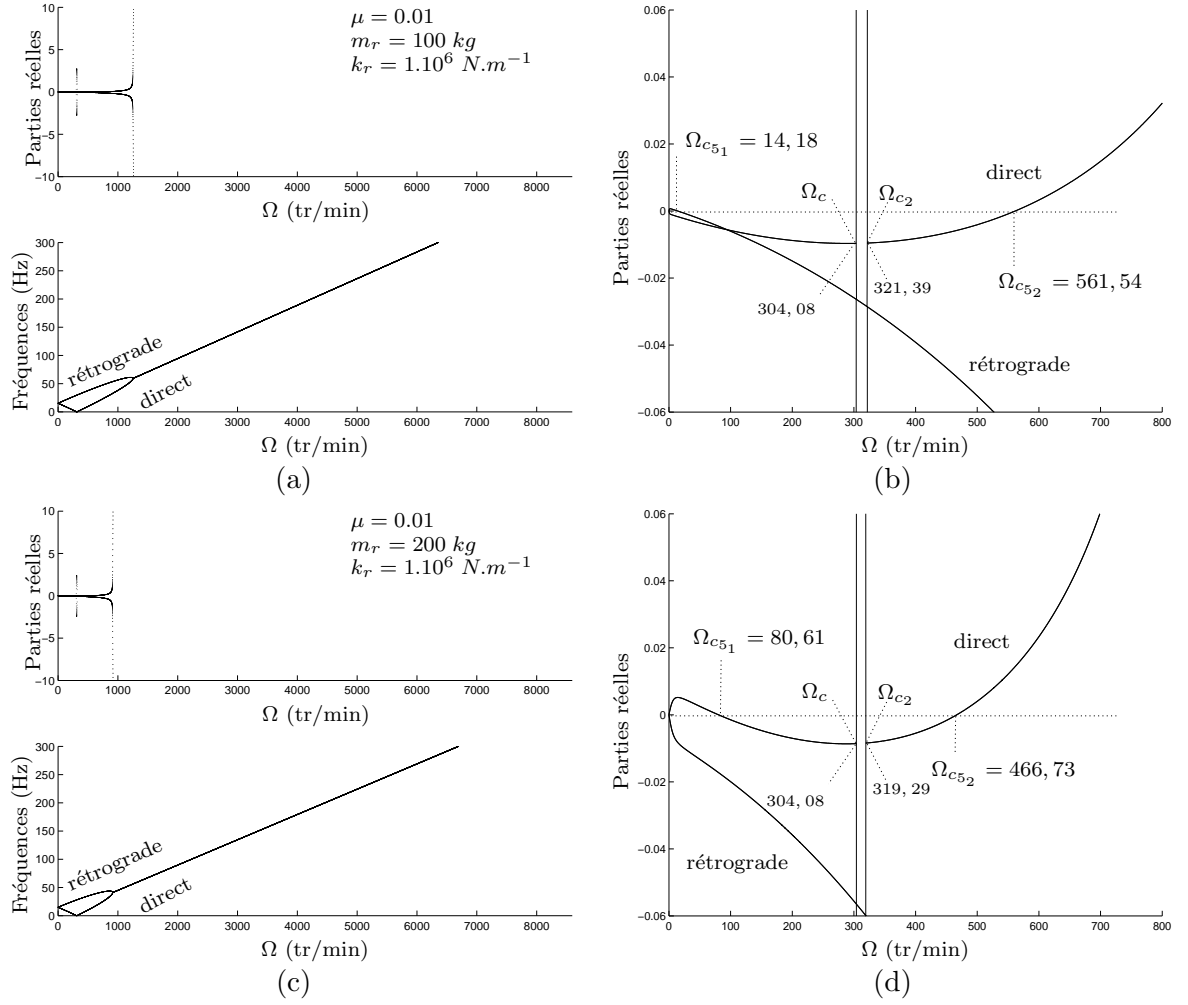


FIG. 5.19 – Analyse de stabilité du mode à trois diamètres nodaux du stator excité par une aube rotative ne possédant qu'un degré de liberté de traction/compression avec  $\mu = 0.01$  et (a)  $\omega_r > \omega_n$  ((b) étant un zoom sur les parties réelles) et (c)  $\omega_r < \omega_n$  ((d) étant un zoom sur les parties réelles)

– si  $\Omega^2 > \frac{4m_t k_t}{\left(2\mu\rho_b S_b \frac{R_{stat}}{\pi}\right)^2 + 4m_t \left(m_t - \rho_b I_b \frac{\pi^2}{8R_{stat}}\right)}$  alors  $\Delta > 0$  et deux racines du polynôme caractéristique 5.41 s'écrivent :

$$s_1 = \frac{-2\mu\rho_b S_b \frac{R_{stat}}{\pi} \Omega + \sqrt{\Delta}}{2m_t} \quad \text{et} \quad s_2 = \frac{-2\mu\rho_b S_b \frac{R_{stat}}{\pi} \Omega - \sqrt{\Delta}}{2m_t} \quad (5.44)$$

On a trivialement  $Re(s_2) < 0$  par contre, la partie réelle de  $s_1$  peut être positive si  $\Omega^2 > \Omega_{c6}^2$  avec :

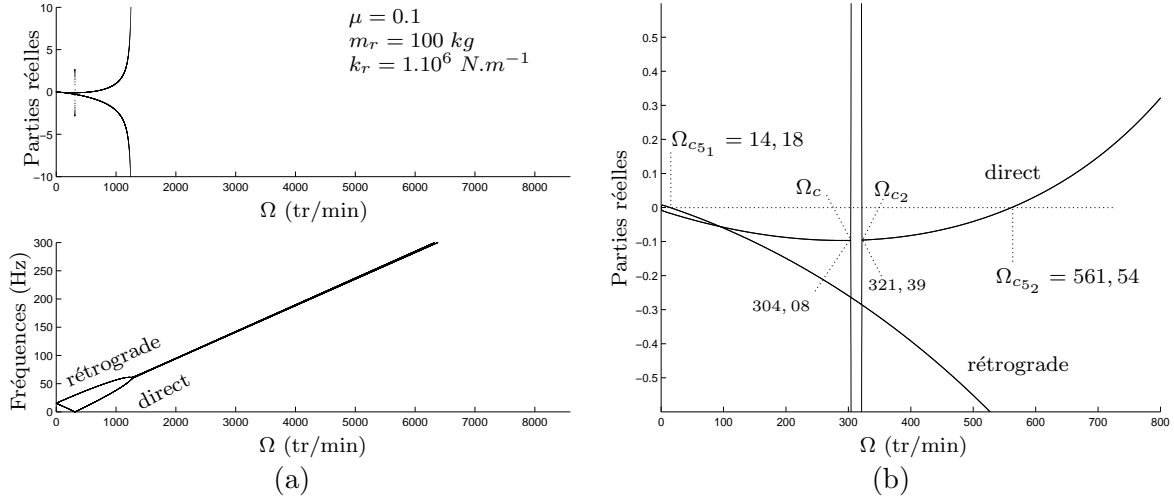


FIG. 5.20 – (a) Analyse de stabilité du mode à trois diamètres nodaux du stator excité par une aube rotative ne possédant qu'un degré de liberté de traction/compression avec  $\mu = 0.1$  et  $\omega_r > \omega_n$ , (b) étant un zoom sur les parties réelles

$$\Omega_{c_6} = \frac{k_t}{\left(m_t - \rho_b I_b \frac{\pi^2}{8 R_{stat}}\right)} \quad (5.45)$$

Ceci implique que le degré de liberté de flexion de la poutre peut diverger si la vitesse de rotation devient supérieure à cette dernière vitesse critique.

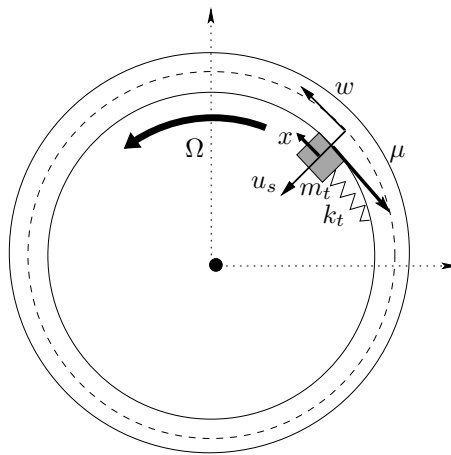


FIG. 5.21 – Modèle d'anneau élastique excité par une poutre ne possédant qu'un degré de liberté de flexion

Les figures 5.22 (a) et (b) illustrent ce résultat avec dans le premier cas un coefficient de

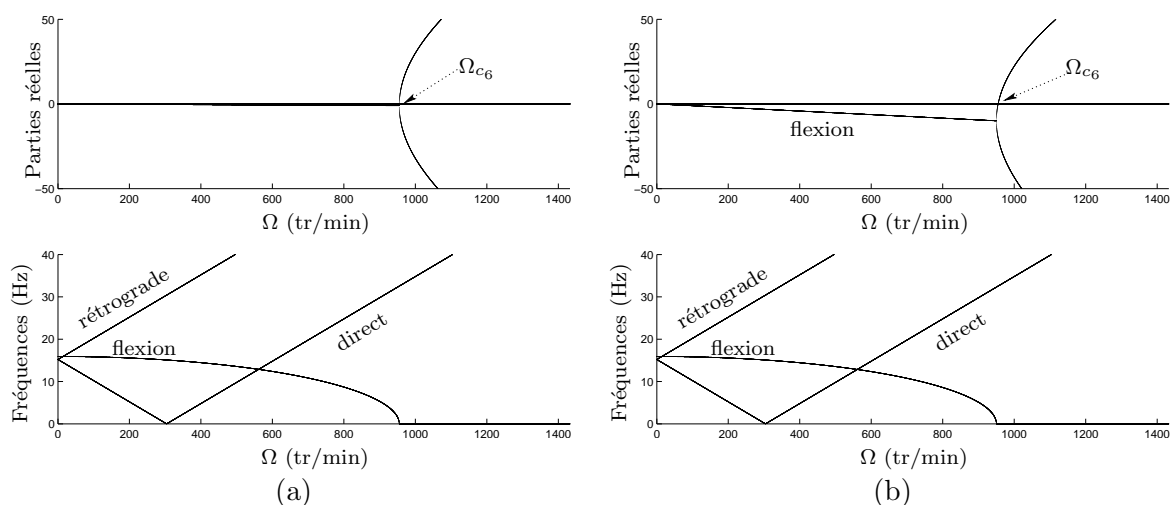


FIG. 5.22 – Analyse de stabilité du mode à trois diamètres nodaux du stator excité par une aube rotative ayant un degré de liberté de flexion, avec (a)  $\mu = 0.01$  et (b)  $\mu = 0.1$

frottement  $\mu = 0.01$  et dans le second  $\mu = 0.1$ . On voit donc bien que la poutre ne possédant qu'un degré de liberté de flexion diverge lorsque  $\Omega > \Omega_{c6}$ . Comme précédemment, une augmentation du coefficient de frottement résulte en une augmentation du gradient des parties réelles associées à la poutre, qui sont d'ailleurs négatives jusqu'à la divergence. Par contre il faut préciser qu'aucun des deux modes de l'anneau considérés n'est déstabilisé par le frottement dans ce cas.

La stabilité des deux degrés de liberté d'une aube frottant contre un anneau élastique ayant été étudiée séparément, il convient maintenant de les considérer tous les deux.

### Poutres possédant deux degrés de liberté

Le système ici considéré est celui représenté par la figure 5.1 avec  $\alpha_j = 0$ . Les aubes possèdent désormais deux degrés de liberté et sont toujours considérées comme normales à la face interne de l'anneau.

La figure 5.23 représente l'étude de stabilité du mode à trois diamètres nodaux du carter excité par **une aube** possédant des raideurs en traction/compression et en flexion égales dans le cas  $\mu = 0.1$ . Tous les phénomènes identifiés lors des études séparées associées à chaque degré de liberté sont présents : le mode direct (indiqué par la lettre D sur la figure 5.23) diverge entre  $\Omega_c$  et  $\Omega_{c2}$ , le degré de liberté de flexion de l'aube (indiqué par la lettre f) diverge lorsque  $\Omega > \Omega_{c6}$  et enfin, les modes direct et rétrograde (indiqué par la lettre R) coalescent. L'influence d'une augmentation du coefficient de frottement est également la même que précédemment et n'est pas représentée sur cette figure. Par contre, deux nouveaux phénomènes apparaissent : un locus veering entre le mode rétrograde de l'anneau et le mode de flexion de l'aube, ainsi qu'un couplage entre ce même mode de flexion et le mode direct de l'anneau. Le phénomène de veering



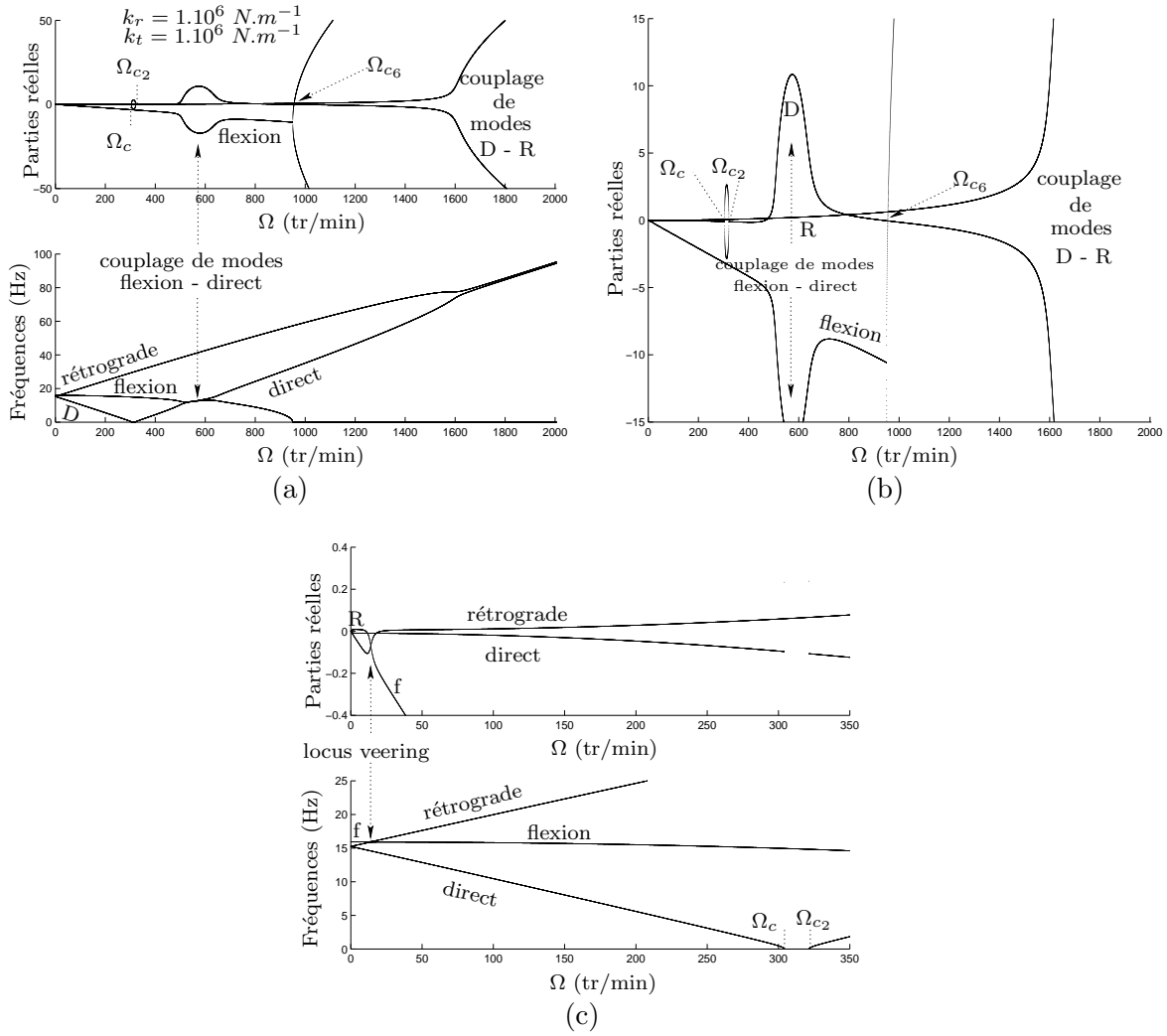


FIG. 5.23 – (a) Analyse de stabilité du mode à trois diamètres nodaux du stator excité par une aube rotative ayant deux degrés de liberté avec  $k_r = k_t = 1.10^6 \text{ N.m}^{-1}$  et  $\mu = 0.1$ , (b) zoom sur les parties réelles, (c) zoom de (a)

consiste en fait en une répulsion des deux courbes des fréquences propres associées à ces deux modes accompagnée d'un échange des déformées propres associées à chacune de ces courbes. Cette répulsion peut être plus ou moins brutale [52, 75]. En ce qui concerne la coalescence entre le mode de flexion de l'aube et le mode direct de l'anneau, elle est source d'instabilité comme en témoigne le lobe que fait la courbe des parties réelles associées (Cf. figures 5.23 (a) et (b)). La plage de vitesse de rotation dans laquelle se produit ce couplage est très sensible à la valeur de la rigidité en flexion de l'aube : plus celle-ci est élevée, plus cette plage sera large, comme l'illustre la figure 5.24. Celle-ci représente l'étude de stabilité du même système avec toujours  $\mu = 0.1$  mais cette fois-ci, l'aube possède des rigidités en traction/compression et en flexion différentes.

Enfin, le cas de plusieurs aubes frottant sur le carter va être étudié. Nous allons nous limiter au cas de **deux aubes** de mêmes paramètres modaux excitant le mode à trois diamètres

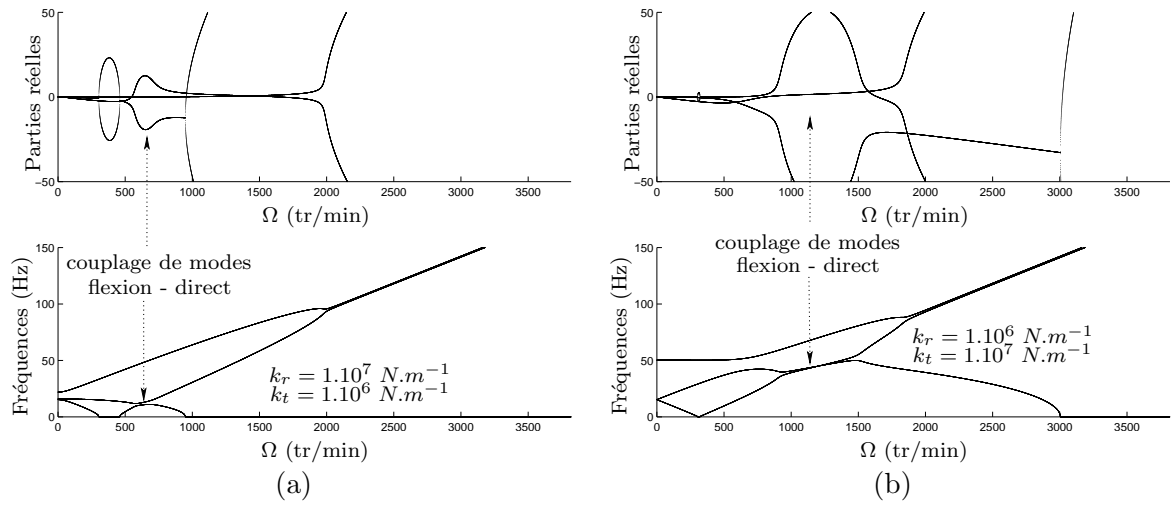


FIG. 5.24 – Analyse de stabilité du mode à trois diamètres nodaux du stator excité par une aube rotative ayant deux degrés de liberté avec  $\mu = 0.1$  et (a)  $k_r = 1.10^7 \text{ N.m}^{-1}$ ,  $k_t = 1.10^6 \text{ N.m}^{-1}$ , (b)  $k_r = 1.10^6 \text{ N.m}^{-1}$ ,  $k_t = 1.10^7 \text{ N.m}^{-1}$

nodaux de l'anneau. La figure 5.25 (a) représente l'analyse de stabilité de ce système dans le cas où les deux aubes sont écartées de  $90^\circ$  l'une de l'autre, la figure 5.25 (b) représentant le cas où elles sont diamétralement opposées. Tout d'abord, il apparaît que le système de la figure 5.25 (a) ne présente pas de zone de divergence du mode direct de l'anneau. En effet, les aubes ayant les mêmes paramètres modaux et, étant situées à  $60^\circ$  et  $150^\circ$  dans le repère tournant, leur configuration vérifient la condition 5.27 de suppression de la zone de divergence du mode à trois diamètres nodaux du carter. Sur la figure 5.25 (b), celle-ci n'est pas vérifiée et l'anneau peut diverger. De plus, dans les deux cas, seule une des deux aubes (celle notée  $f_2$  sur les figures) se couple avec le mode direct de l'anneau. Un agrandissement des figures dans une plage de vitesses faibles aurait permis de voir qu'également une seule aube effectue un veering avec le mode rétrograde de l'anneau comme expliqué dans le cas précédent.

Il apparaît, pour finir, un phénomène nouveau concernant la stabilité des aubes. En effet, sur la figure 5.25 (a), apparaît, après la divergence de ces dernières, une instabilité de type flottement : les aubes sont toujours instables mais elles sont animées d'un mouvement à fréquence non nulle dans le repère tournant. Cette transition d'une divergence à un flottement provient du couplage entre les deux aubes. Celui-ci s'effectue uniquement entre deux aubes, par l'intermédiaire de l'anneau avec lequel elles sont en contact permanent. Il s'en suit que le mode d'anneau considéré est très important pour ce couplage. La figure 5.26 représente les zones de positions angulaires dans lesquelles une aube peut se coupler avec une seconde aube positionnée à  $60^\circ$  dans le repère tournant, selon que le mode à deux ou trois diamètres nodaux de l'anneau soit considéré. On voit ainsi qu'il existe quatre régions dans lesquelles ce couplage est possible, dans le cas du mode à deux diamètres nodaux de l'anneau et, six, dans le cas du mode à trois diamètres nodaux. On peut constater que lorsque le nombre de diamètres nodaux augmente et donc que les lobes des déformées se resserrent, les plages de couplages diminuent. Ainsi, dans le cas du mode à deux diamètres nodaux, celle-ci font  $36^\circ$  alors que

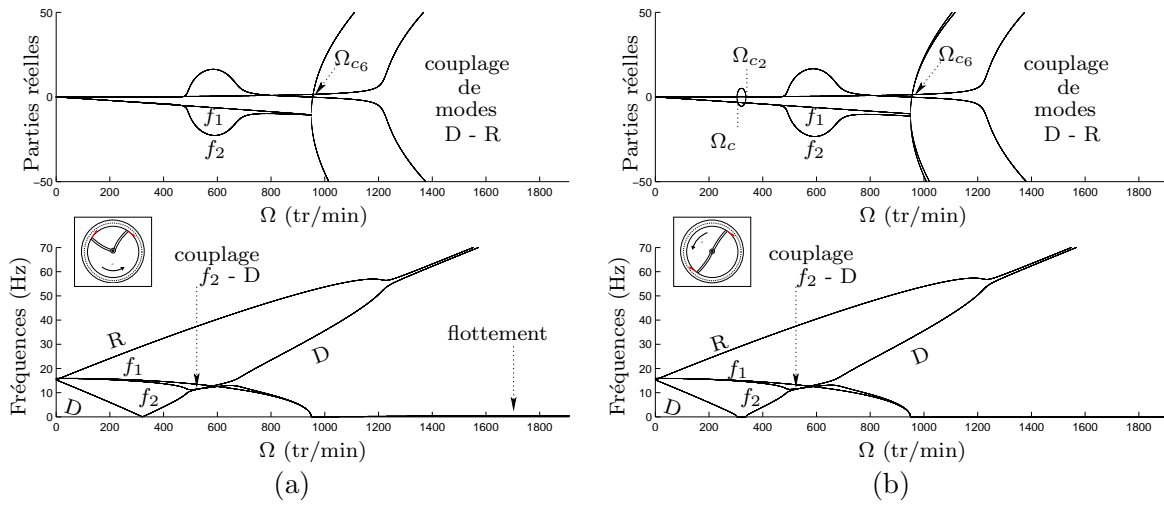


FIG. 5.25 – Analyse de stabilité du mode à trois diamètres nodaux du stator excité par deux aubes identiques ayant deux degrés de liberté avec  $\mu = 0.1$  et (a) à  $90^\circ$  l'une de l'autre, (b) diamétralement opposées

pour le mode à trois diamètres nodaux, elles ne font que  $16^\circ$ . Par extension, dans ce dernier cas, la plage angulaire globale où il peut y avoir couplage mesure  $96^\circ$  contre  $144^\circ$  dans le cas du mode à deux diamètres nodaux. La figure 5.27 met en évidence ce couplage des valeurs propres associées aux aubes, dans le cas de deux aubes identiques, positionnées à  $60^\circ$  et à  $145^\circ$  dans le repère tournant, couplées par l'intermédiaire du mode à trois diamètres nodaux de l'anneau. On peut noter que dans chaque plage angulaire de couplage potentiel, les vitesses auxquelles se produisent ce phénomène varient. Le tableau 5.2 donne l'évolution de ces vitesses dans le cas du système de la figure 5.27. Enfin, on peut citer une étude de Gaul et Wagner [29] reportant une transition entre deux types d'instabilités. Dans leur cas il s'agissait d'une divergence apparaissant à la suite d'un flottement d'un système tournant.

Jusqu'ici, les cas étudiés de plusieurs aubes frottant contre le carter, considéraient des aubes identiques. Il convient maintenant d'en considérer ayant des paramètres différents. La figure 5.28 représente l'étude de stabilité d'un système composé de deux aubes, distantes l'une de l'autre de  $60^\circ$ , ayant des paramètres modaux en traction/compression et en flexion différents, frottant sur le mode à trois diamètres nodaux de l'anneau. Contrairement aux cas précédents, les deux aubes se couplent à tour de rôle avec le mode direct de l'anneau. En effet, compte-tenu des évolutions des fréquences des modes de flexion des aubes, qui décroissent quand la vitesse de rotation augmente, et de celle du mode direct de l'anneau, qui croit (une fois sa vitesse critique passée) quand la vitesse augmente, la possibilité de croisement et donc de coalescence entre ces modes est grande. Cette probabilité de coalescence peut, comme nous allons le voir dans le paragraphe suivant, être modulée par un angle d'incidence des aubes sur le stator.

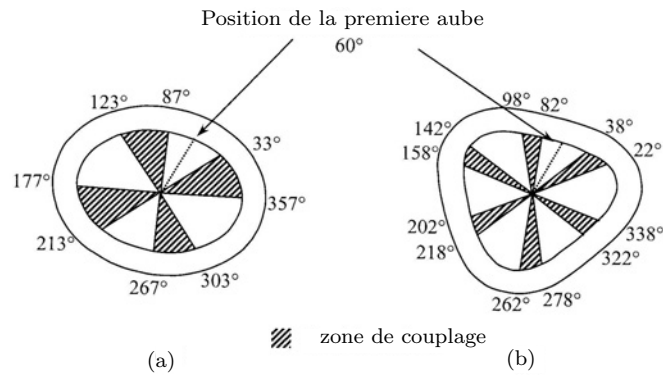


FIG. 5.26 – Zones de couplage d'une aube avec une seconde située à 60° dans le repère tournant et frottant sur (a) le mode à deux diamètres nodaux de l'anneau, (b) le mode à trois diamètres nodaux de l'anneau, avec  $\mu = 0.1$

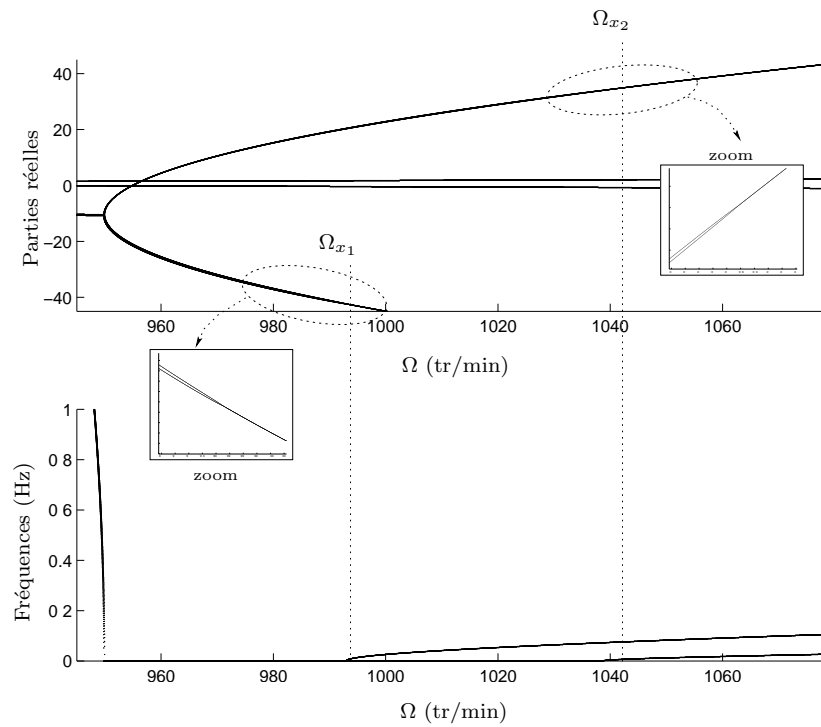


FIG. 5.27 – Couplage entre deux aubes identiques frottant sur le mode à trois diamètres nodaux de l'anneau avec  $\mu = 0.1$ , l'une étant à 60° et l'autre, à 145° dans le repère tournant

### Influence d'un angle d'inclinaison des aubes

Lors de contacts entre les aubes d'un rotor de turboréacteur et un carter, il n'y a aucune raison pour que celles-ci soient orthogonales à la surface interne du carter. Il convient donc d'étudier l'effet d'un angle d'inclinaison entre les aubes et la normale à la face interne de l'anneau, sur la stabilité du système. Ce genre d'étude a déjà été réalisé, notamment par Cham-

brette et Jézéquel [6], mais concernait toujours un disque excité sur une de ses faces. Il a ainsi été montré qu'un angle d'incidence peut modifier les domaines paramétriques où le système est instable. Les instabilités relevées par les précédentes études consistaient, comme dans notre cas, en une divergence post-critique c'est-à-dire ayant lieu après la vitesse critique du disque, ainsi qu'en un couplage de modes. Les résultats principaux de Chambrette montrent alors que plus l'angle d'inclinaison de la poutre agissant sur le disque est grand (Cf. figure 5.29), plus la plage de vitesses dans laquelle ce dernier diverge est petite et plus le couplage de modes a lieu à des vitesses de rotations élevées. Il a également été reporté que des couplages de modes pouvaient survenir avant la vitesse critique du disque si la fréquence du mode de flexion de la poutre était en dessous ou proche de celle du disque. L'influence d'un angle d'incidence sur la stabilité du système qui nous intéresse devrait donc être étudiée dans les cas où la fréquence du mode de flexion de l'aube (si une seule aube est considérée) est en dessous, puis au dessus et enfin, très proche de celle de l'anneau élastique. Cependant, les mécanismes mis en jeu par cet angle étant qualitativement les mêmes, seul le cas où la fréquence de l'aube est en dessous de celle de l'anneau sera détaillé.

Position angulaire de la seconde aube (deg.)	$\Omega_{x_1}$ (tr/min)	$\Omega_{x_2}$ (tr/min)
142	1114	1228
146	973	1007
150	951	951
154	973	1007
158	1114	1228

TAB. 5.2 – Vitesses caractéristiques du couplage entre une aube située à  $60^\circ$  dans le repère tournant et une seconde située entre  $142^\circ$  et  $158^\circ$  par l'intermédiaire du mode à trois diamètres nodaux le l'anneau

Le système étudié dans ce paragraphe est donc celui de la figure 5.1 avec cette fois-ci  $\alpha \neq 0$ . L'équation matricielle du comportement de ce système est détaillée en annexe A. Dans ce qui suit, une seule aube sera considérée. La fréquence du mode à trois diamètres nodaux de l'anneau est fixée, à l'arrêt, à 30 Hz dans le repère tournant, celle du mode de flexion de l'aube, à 20 Hz et celle du mode de traction/compression, à 70 Hz. La figure 5.30 représente les études de stabilité de ce système pour quatre valeurs de l'angle d'inclinaison : (a)  $\alpha = 0^\circ$ , (b)  $\alpha = 5^\circ$ , (c)  $\alpha = 10^\circ$  et (d)  $\alpha = 89^\circ$ . Ces valeurs d'angle d'inclinaison ont été choisies du fait de la rapide évolution de la stabilité du système pour de faibles valeurs de  $\alpha$ . Sur la figure 5.31 sont représentés des zooms judicieux de la figure précédente 5.30.

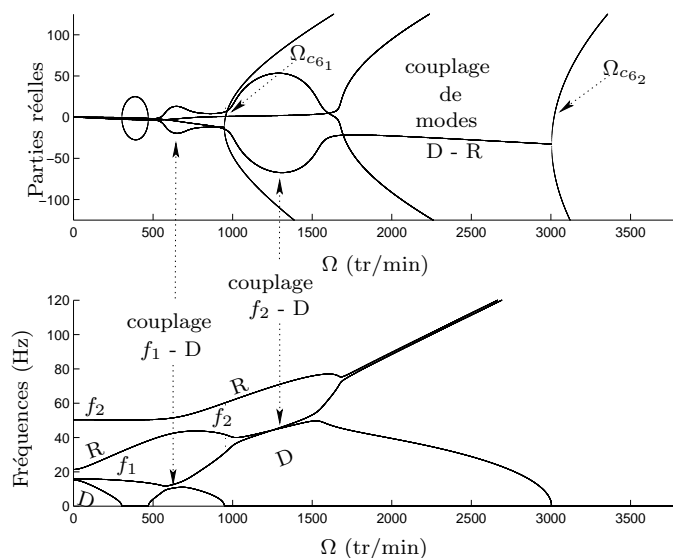


FIG. 5.28 – Analyse de stabilité du mode à trois diamètres nodaux du stator excité par deux aubes de paramètres modaux différents ayant deux degrés de liberté, distantes de  $60^\circ$  et avec  $\mu = 0.1$

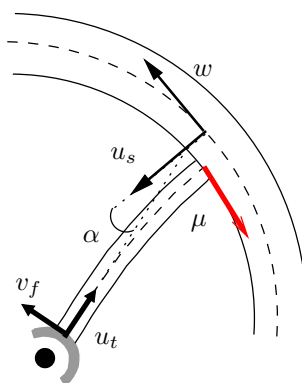


FIG. 5.29 – Angle d'incidence de l'aube sur le carter

Il apparaît tout d'abord, sur la figure 5.30, que la vitesse à laquelle les deux modes de l'anneau coalescent s'éloigne à mesure que l'angle d'inclinaison augmente. Il en est de même pour la vitesse à laquelle le mode de flexion diverge. De plus, la plage de vitesses de rotation dans laquelle le mode de flexion de l'aube se couple avec le mode direct de l'anneau (couplage que nous avons déjà mis en évidence) est modifiée par l'angle d'inclinaison. En effet, lorsque  $\alpha$  augmente, celle-ci commence plus tard mais tend à s'élargir comme en atteste plus en détails la figure 5.31. Sur cette figure, il apparaît également que la zone de divergence du mode direct de l'anneau diminue quand  $\alpha$  augmente, jusqu'à quasiment disparaître comme le montre la figure 5.31 (d). Pour de faibles angles d'inclinaison, un veering, voire un couplage de modes, peut se produire entre le mode direct de l'anneau et le mode de flexion de l'aube et ce, avant la

vitesse critique de l'anneau. Ce veering, visible sur la figure 5.31 (b) peut effectivement être un véritable couplage de modes comme le montre la figure 5.31 (a) où une augmentation rapide des parties réelles peut être observée. Lorsque l'angle d'inclinaison  $\alpha$  augmente, la fréquence caractéristique de l'aube se déplace depuis la fréquence du mode de flexion (20 Hz) vers celle du mode de traction compression (70 Hz), s'éloignant ainsi du mode direct de l'anneau et se rapprochant de son mode rétrograde permettant alors des interactions. Ainsi, sur la figure 5.31 (d), lorsque  $\alpha$  est élevé, il apparaît un veering entre ce mode de flexion de l'aube et cette fois-ci, le mode rétrograde de l'anneau.

Tous ces phénomènes et ces évolutions peuvent être suivis de façon continue en fonction de  $\alpha$ , comme le montrent les figures 5.32 et 5.33. Le recul de la vitesse à laquelle coalescent les modes direct et rétrograde de l'anneau peut être visualisé sur la figure 5.32. Le couplage de modes post-critique entre le mode direct de l'anneau et le mode de flexion de l'aube peut quant à lui être suivi sur la figure 5.33, de même que l'évolution de la vitesse de divergence de ce dernier degré de liberté. Il apparaît ainsi que la plage de vitesses de rotation où ce couplage de modes post-critique perdure peut, bien qu'elle soit retardée, être élargie de près de 140 tr/min entre une configuration à  $\alpha = 0^\circ$  et une configuration à  $\alpha = 89^\circ$ . Enfin, toujours sur cette figure 5.33, on voit comment, lorsque  $\alpha$  augmente, la fréquence du mode de flexion de l'aube va évoluer (augmenter) et se rapprocher de celle du mode direct de l'anneau qui, quant à elle, décroît avec la vitesse de rotation. Pour certaines valeurs de l'angle d'inclinaison, ces deux fréquences sont extrêmement proches et des couplages de modes peuvent alors survenir (Cf. figure 5.31 (a)).

En fait, ce comportement résume le mécanisme prédominant de l'influence d'un angle d'inclinaison de l'aube sur la stabilité du système. Pour synthétiser l'ensemble des constatations précédentes, on peut dire que la stabilité du système va dépendre des positions relatives des fréquences des différents modes de ce dernier. Si, lorsqu'une aube est orthogonale à la surface de l'anneau, la fréquence de son mode de flexion est inférieure à celles du carter, à l'arrêt, puisque la fréquence de l'aube décroît avec la vitesse de rotation, une interaction de celle-ci avec l'anneau ne pourra être envisagée qu'avec le mode direct de celui-ci qui décroît également avec  $\Omega$ . Dans ce cas de figure, en fonction de la valeur de  $\alpha$ , ces deux fréquences peuvent être très proches et ainsi donner lieu à un couplage de modes avant même la divergence du mode direct de l'anneau, comme le montre la figure 5.31 (a). Lorsque l'angle d'inclinaison augmente, la fréquence de mode de flexion de l'aube augmente également et, dans le cas présent, pour  $\alpha > 10^\circ$ , elle est supérieure aux fréquences de l'anneau à  $\Omega = 0$  tr/min. Dans ce cas, des interactions ne pourront survenir qu'avec le mode rétrograde de l'anneau qui croît avec la vitesse de rotation. Des veering peuvent alors avoir lieu entre ces deux modes comme le montre la figure 5.31 (d) mais, les fréquences concernées sont moins proches que dans le cas de la figure 5.31 (a). Enfin, puisque la fréquence du mode de flexion de l'aube décroît toujours avec la vitesse de rotation et que, celle du mode direct croît, une fois sa vitesse critique dépassée, un couplage entre ces deux modes peut intervenir comme nous l'avons ici remarqué.

Ainsi, les phénomènes décrits lors de l'interaction entre une poutre et un disque sont qualitativement proches de ceux décrits dans le cas de notre système à savoir, que l'angle

d'inclinaison de l'aube va modifier les domaines paramétriques dans lesquels le système est instable. Celui-ci peut ainsi donner lieu à un couplage entre le mode de flexion de l'aube et le mode direct de l'anneau avant même la vitesse critique de ce dernier. Il peut également modifier considérablement la zone de couplage post-critique entre ces mêmes modes. Enfin, l'augmentation de l'angle d'incidence de la poutre frottant contre la face interne de l'anneau peut réduire la plage de vitesses de rotation dans laquelle le mode direct de ce dernier peut diverger et, retarder la vitesse à laquelle ses modes direct et rétrograde se couplent. L'action de cet angle peut également être interprétée comme une pondération des paramètres de contacts normaux et tangentiels qui eux même pilotent les vitesses de divergence et de couplage de modes, comme nous l'avons vu précédemment.

Les résultats présentés dans ce chapitre concernent essentiellement le mode à trois diamètres nodaux de l'anneau. Cependant, les mêmes phénomènes interviennent avec d'autres modes d'anneau. De plus, dans cette étude, un seul mode d'anneau est considéré à la fois. Mais, comme le montrent Iwan and Stahl [41] ainsi qu'Iwan and Moeller [40], cette approximation est très représentative de la stabilité d'un tel système lorsque tous ses modes sont considérés.

Comme dans le cas précédent, il convient maintenant de valider ces études de stabilité où le frottement est pris en compte et surtout d'étudier le comportement dynamique de ce système.

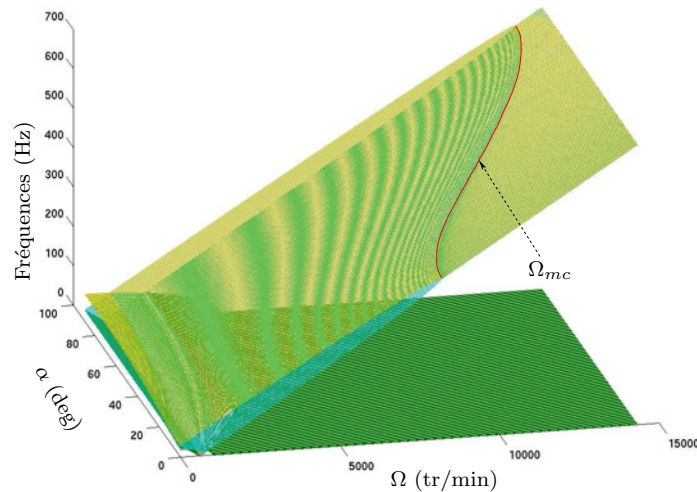


FIG. 5.32 – Diagramme de Campbell du mode à trois diamètres nodaux d'un anneau (30 Hz) excité par une aube dont le mode de flexion est à 20 Hz, le mode de traction/compression à 70 Hz, en fonction de  $\alpha$  - évolution de  $\Omega_{mc}$



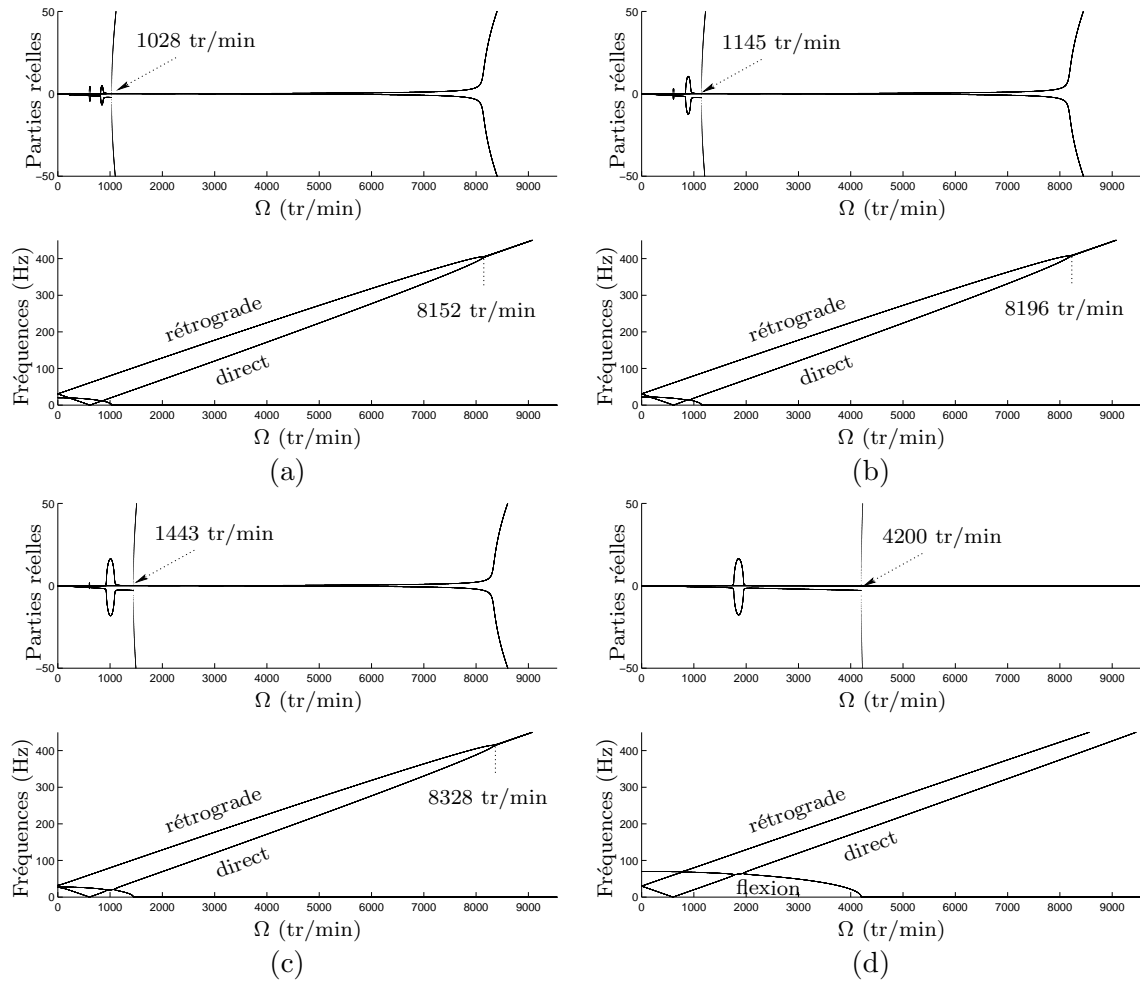


FIG. 5.30 – Analyse de stabilité du mode à trois diamètres nodaux du stator (30 Hz) excité par une aube rotative avec  $\mu = 0.01$  et à (a)  $\alpha = 0^\circ$ , (b)  $\alpha = 5^\circ$ , (c)  $\alpha = 10^\circ$ , (d)  $\alpha = 89^\circ$

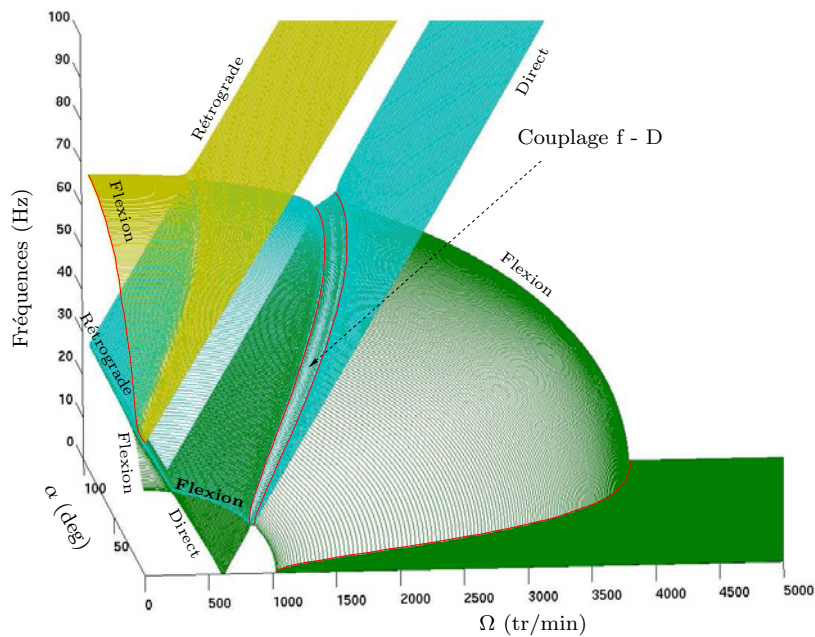


FIG. 5.33 – Zoom sur la figure 5.32

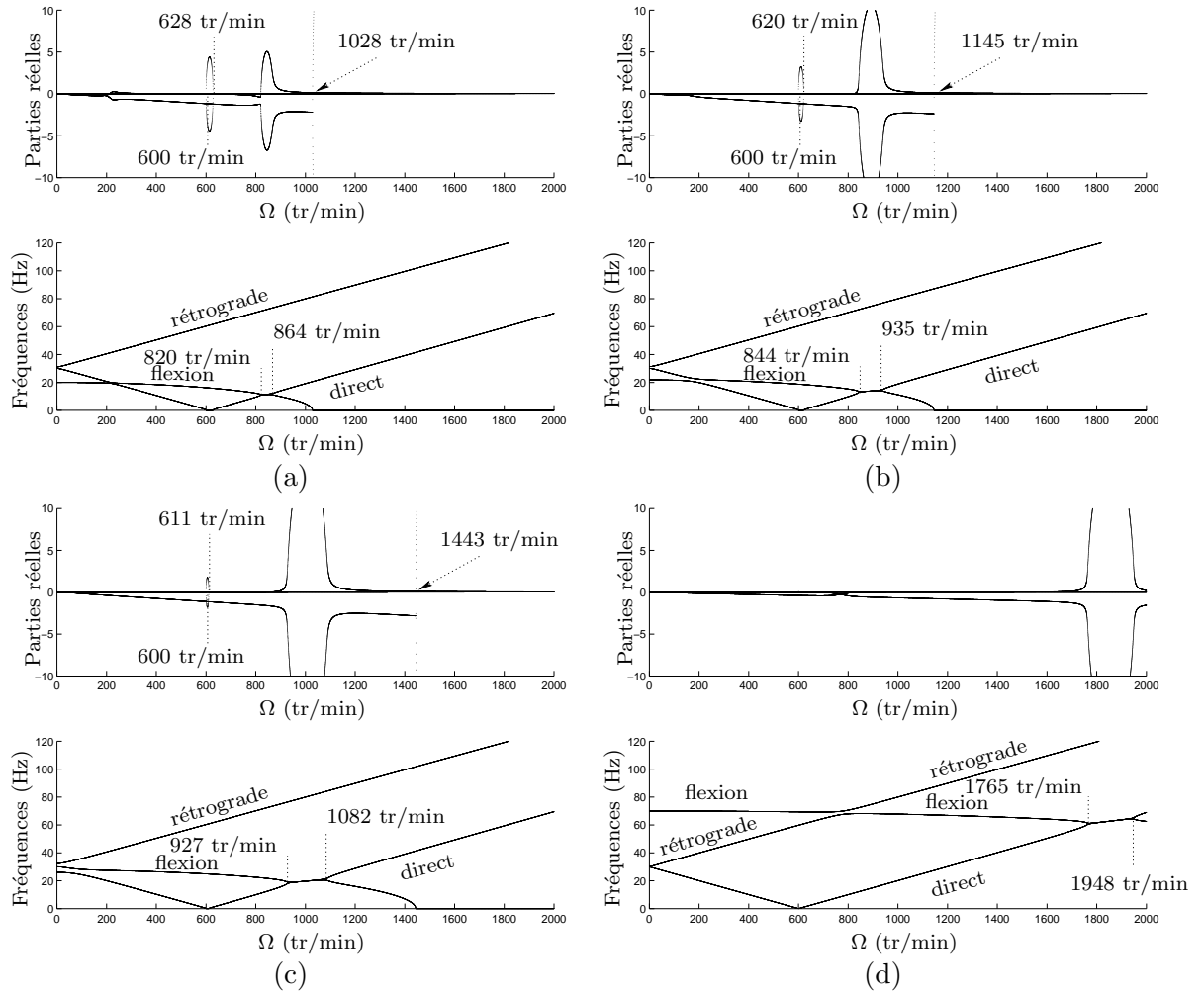


FIG. 5.31 – Agrandissements de la figure 5.30

### 5.1.3.2 Comportement dynamique

Tout comme dans le cas sans frottement, nous allons étudier le comportement dynamique du système à différentes vitesses de rotation. Deux résultats principaux provenant de la prise en compte du frottement lors du contact semblent être intéressants à étudier. Le premier réside dans le rôle déstabilisant du frottement, dès que la vitesse de rotation des aubes est non nulle et le second, dans la possibilité de couplage entre le mode de flexion des aubes et le mode direct de l'anneau.

Nous allons donc étudier l'influence du frottement sur le comportement dynamique du système à une vitesse de rotation pour laquelle le système, sans frottement, est parfaitement stable et adopte une configuration statique dans le repère tournant. Cependant, pour cette étude, l'anneau va être amorti. Il en résulte, comme nous l'avons précisé, une translation des parties réelles des valeurs propres associées à ce dernier vers le bas du plan complexe, comme le montre la figure 5.34. Celle-ci représente la même étude de stabilité que la figure 5.23, c'est-à-dire dans le cas d'un anneau excité par une poutre possédant les mêmes paramètres

modaux en traction/compression et en flexion mais, dans le cas où le stator est amorti et, pour différents coefficients de frottement. Il apparaît ainsi que l'amortissement fixe de l'anneau stabilise le système. Donc, contrairement au cas présenté par la figure 5.23 où, dès que la vitesse de rotation des aubes était non nulle, le système était instable à cause du frottement, il faudra dans le cas présent atteindre un certain seuil de frottement pour que celui-ci déstabilise le système. La figure 5.34(c) montre notamment que bien que les parties réelles des valeurs propres du carter aient augmenté par rapport à la figure 5.34 (b) à cause du coefficient de frottement, elles restent quand même négatives. Par contre, à  $\mu = 1.8$ , celles-ci deviennent très vite positives quand la vitesse de rotation augmente, comme le montre la figure 5.34 (d). Le frottement a donc peu de chances de modifier le comportement dynamique du système pour des valeurs de coefficient faibles. La figure 5.36 (a) montre en effet qu'à  $\Omega = 286,5$  tr/min et  $\mu = 0.4$ , le système adopte une configuration statique dans le repère tournant, comme c'était le cas sans frottement (Cf. figure 5.9 (a)). Ceci est conforme à l'étude de stabilité 5.34(c) selon laquelle le système linéaire est stable pour cette valeur de coefficient de frottement. Dans cette configuration adoptée par le système, l'aube a une configuration fléchie dont le signe de la déflexion, représentée sur la figure 5.36 (b), est conforme au schéma 5.29. Par contre, pour un coefficient de frottement de  $\mu = 1.8$  le système adopte une configuration dynamique, comme le montre la figure 5.35 (a). L'aube, dont la flexion est également représentée sur la figure 5.35 (b) oscille autour d'une configuration fléchie toujours dans le même sens. La force de frottement est donc orientée toujours dans le même sens, conformément au modèle linéaire sur lequel ont été réalisées les études de stabilité précédentes.

Cependant, la figure 5.34 (d) montre que ce système linéaire doit être instable. Il se trouve que l'intégration temporelle représentée sur la figure 5.35 a été réalisée avec un modèle où l'orientation de la force de frottement peut varier. En effet, le signe de celle-ci dépend comme nous l'avons déjà précisé, du signe de la vitesse de glissement de l'aube sur le carter. Dans ce modèle, la vitesse de l'aube peut, dans le cas d'une vitesse de rotation faible comme c'est le cas de la figure 5.35, atteindre la vitesse tangente de l'anneau faisant alors apparaître une zone d'arrêt entre l'aube et le carter.

Cependant, sur la figure 5.35 (c) qui représente la vitesse tangente de ces deux structures, il faut noter que la phase d'arrêt évoquée se manifeste par des oscillations très rapides de la vitesse de l'aube au voisinage de celle du carter. En fait, ceci provient du modèle de frottement de Coulomb qui n'est pas adapté pour modéliser correctement la phase de collement entre deux solides frottant l'un contre l'autre [44]. Il est par contre très intéressant de remarquer que ces oscillations, bien que n'ayant finalement pas de significations physiques, provoquent des oscillations rapides des forces associées au système, comme le montre la figure 5.35 (d), sur laquelle est tracée l'évolution de la première composante de celles-ci (Cf. expression en annexe A). Il en résulte une estimation très délicate de leurs gradients dont une composante est représentée sur la figure 5.35 (e).

Malheureusement, l'estimation de ces gradients étant fondamentale dans la méthode de shooting, il s'en suit que celle-ci convergera très difficilement sur ce genre de système. Ainsi, pour de faibles vitesses de rotation, cette phase de collement rend le système non linéaire d'où

l'existence de régimes dynamiques avec un carter linéaire. Par contre, pour des vitesses plus élevées, la vitesse de l'aube restant toujours supérieure à celle de l'anneau, le système comportant un carter linéaire sera déstabilisé par le frottement, conformément à l'étude de stabilité représentée sur la figure 5.34 (d) et des régimes dynamiques ne pourront être atteints que si un carter non linéaire est considéré.

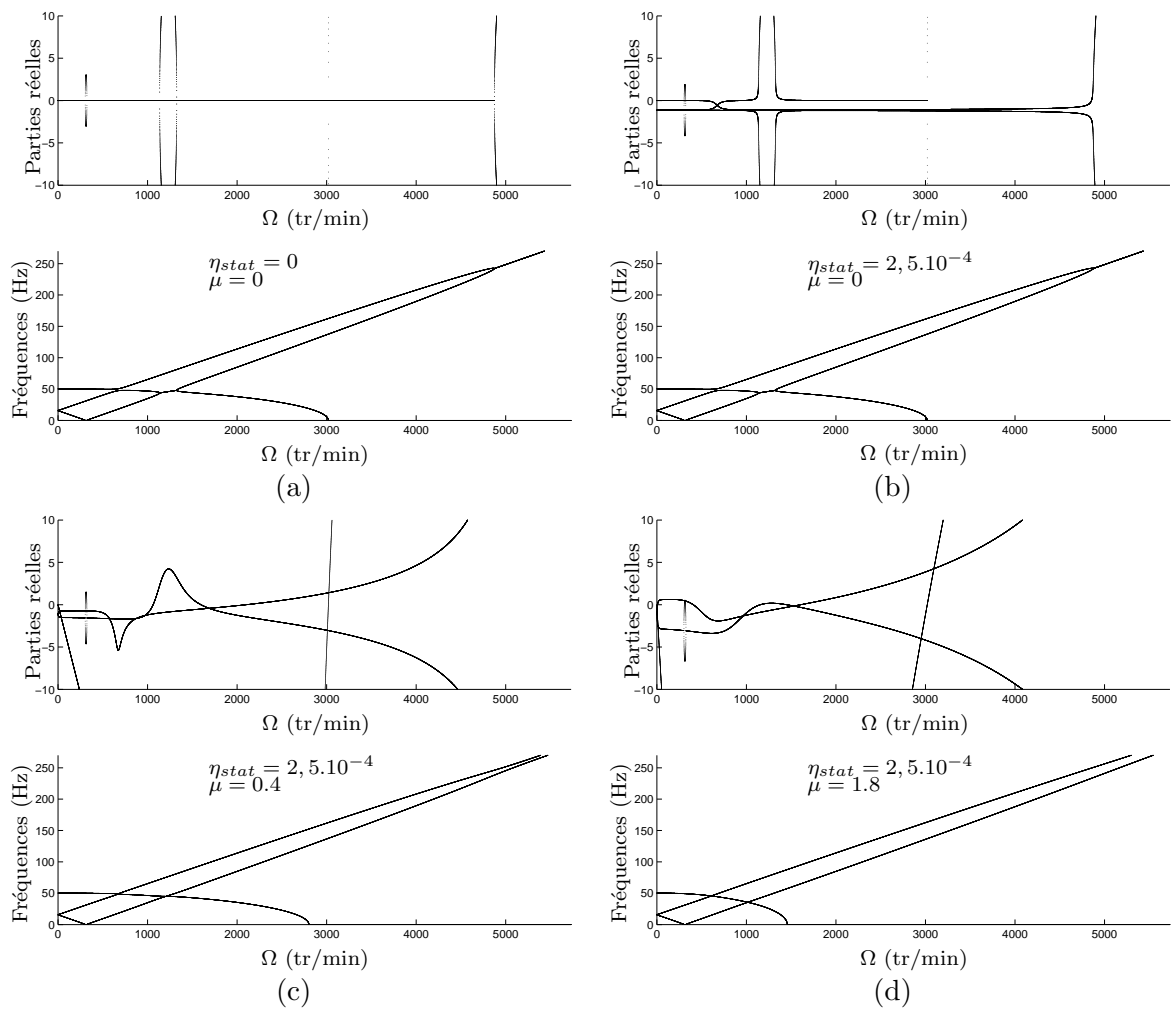


FIG. 5.34 – Analyse de stabilité du mode à trois diamètres nodaux du stator, amorti ou non, excité par une aube rotative ayant deux degrés de liberté avec  $k_r = k_t = 1.10^6 \text{ N.m}^{-1}$  et différents coefficients de frottement

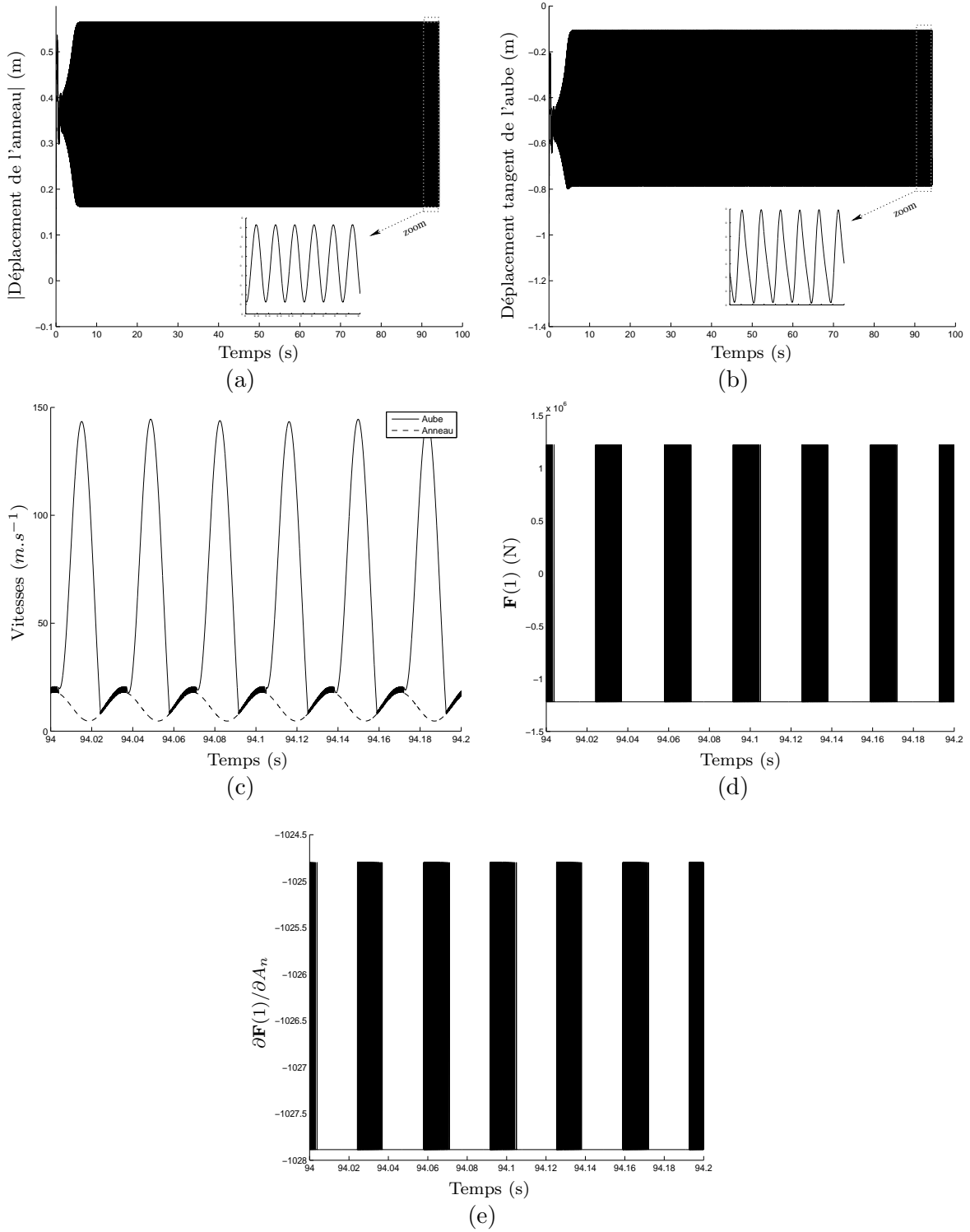


FIG. 5.35 – (a) Comportement dynamique du mode à trois diamètres nodaux de l'anneau associé à la figure 5.34 à  $\Omega = 286,5$  tr/min avec  $\mu = 1.8$ , (b) déplacements tangents de l'aube, (c) évolution des vitesses tangentes de l'aube et du carter, (d) évolution de la première composante des forces associées au système et (e) gradient de cette composante

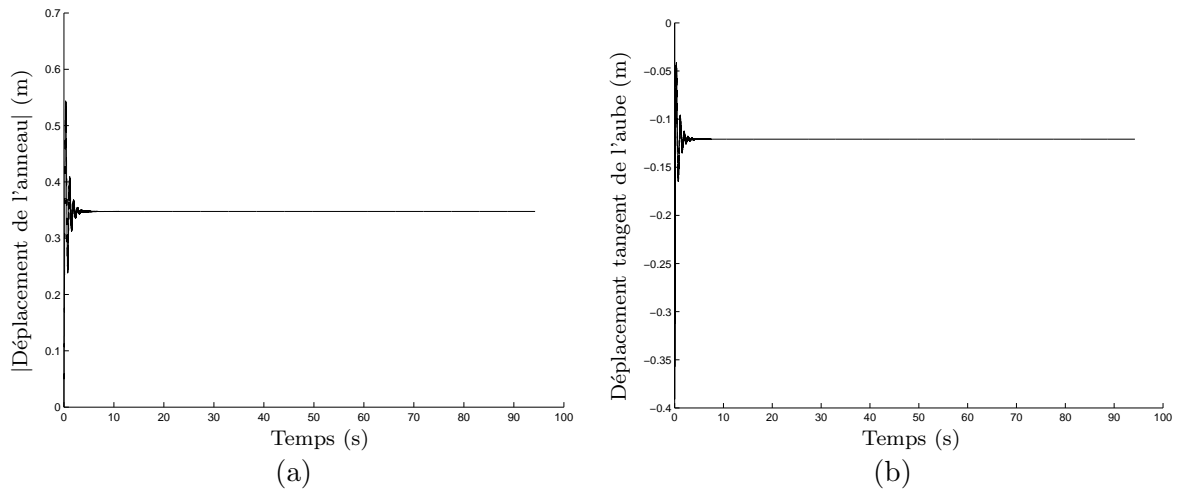


FIG. 5.36 – (a) Comportement dynamique du mode à trois diamètres nodaux de l'anneau associé à la figure 5.34 à  $\Omega = 286,5$  tr/min avec  $\mu = 0.4$ , (b) déplacements tangents de l'aube

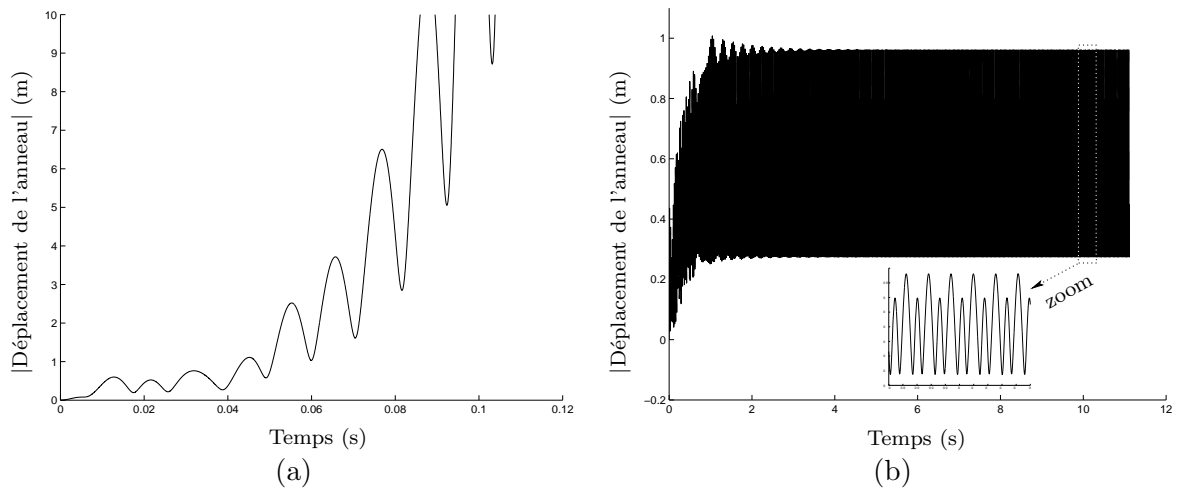


FIG. 5.37 – Comportement dynamique du mode à trois diamètres nodaux de l'anneau associé à la figure 5.34(c) à  $\Omega = 1215$  tr/min (a) sans non linéarités, (b) avec  $k_{NL} = 1.10^5$  N.m<sup>-1</sup>

Enfin, la dynamique du système lors du couplage entre le mode direct de l'anneau et le mode de flexion de l'aube va être étudiée. La figure 5.37 (a) représente le comportement du système à  $\Omega = 1215$  tr/min dans le cas où  $\mu = 0.1$ , c'est-à-dire à une vitesse de rotation se trouvant dans la plage de coalescence de modes et, telle que le coefficient de frottement ne soit pas responsable de l'instabilité repérée, conformément à la figure 5.34(c). Il apparaît ainsi que les amplitudes de vibration de ce système linéaire croissent exponentiellement dans le temps. Si les non linéarités du carter limitant naturellement les amplitudes d'un tel système sont considérées, le comportement dynamique du système qui en résulte est représenté sur la figure 5.37 (b). Nous avons donc une fois de plus à faire à un régime dynamique provoqué par

le couplage entre les deux structures.

Ainsi, l'étude de ce premier modèle phénoménologique de l'interaction rotor/stator a mis en évidence de nombreuses causes et zones d'instabilité du système. Dans les plages de vitesses de rotation où il est stable, il adopte une configuration statique dans le repère tournant par contre, dans les plages où il est instable, il peut adopter des configurations dynamiques. La nécessité de prendre en compte les non linéarités qui limitent naturellement les amplitudes de vibrations d'un tel système est apparue. Dans ce modèle, les contacts entre parties fixe et mobile étant supposés permanents, il va de soit qu'il va falloir autoriser les décollements entre ces structures afin de modéliser plus finement la phénoménologie du contact rotor/stator.

## 5.2 Anneau excité par des charges tournantes pouvant se décoller

### 5.2.1 Modèles

Dans cette section, les contacts entre aubes et stator ne sont plus supposés permanents. Les aubes vont donc pouvoir se décoller du carter. Le contact est géré selon la procédure développée dans la section 3.4. Les différences avec la procédure explicitée dans cette partie proviennent des matrices de contact  $\mathbf{C}_N$  qui permettent, à partir des degrés de liberté généralisés du système, d'obtenir les jeux physiques entre les structures ainsi que les forces de frottement.

L'étape de prédiction se fait conformément à l'équation 3.79. En ce qui concerne l'étape de correction, les deux conditions 3.80 et 3.81 qui assurent la prise en compte du contact doivent être vérifiées. Celles-ci vont être explicitées dans le cas d'une seule aube, par soucis de simplicité. Compte-tenu de la déflexion possible de celle-ci du fait du frottement, son extrémité se trouve à un angle  $\theta$  dans le repère tournant, qui peut être exprimé par :

$$\theta = \phi + \tan^{-1} \left( \frac{v_f}{R + u_t} \right) \quad (5.46)$$

où  $\phi$  est la position initiale de cette aube,  $R$  sa longueur et  $u_t$  et  $v_f$ , ses deux degrés de liberté conformément à la figure 5.1. Pour des pas de temps faibles lors d'une intégration temporelle, les grandeurs prédites peuvent être légitimement supposées bien plus grandes que les grandeurs corrigées. Ainsi, l'angle  $\theta$  pourra être estimé uniquement par les degrés de liberté obtenus à l'étape de prédiction de la procédure. Le jeu  $g_{k+1}$  entre cette aube et le point du stator en vis-à-vis c'est-à-dire à la position angulaire  $\theta$  s'exprime alors, à l'itération  $k + 1$ , par :

$$g_{k+1} = \sqrt{(R + u_t(x = R))^2 + v_f^2(x = R)} - \left[ R_{stat} - \frac{h}{2} - u_s(\theta) \right] \quad (5.47)$$

où  $h$  est l'épaisseur de l'anneau. En procédant comme dans la section 3.4, il est possible d'exprimer la relation que doivent vérifier les degrés de liberté corrigés à l'itération  $k + 1$  afin que le jeu corrigé à cette étape soit nul dans le cas où un contact a été prédit. En dissociant les grandeurs prédites des grandeurs corrigées et en supposant ces dernières bien inférieures

aux degrés de liberté prédits, il vient la première relation à vérifier :

$$g_{k+1} \approx g_{k+1,p} + \mathbf{C}_{\mathbf{N}_{k+1,p}}^T \cdot \mathbf{U}_{k+1,c} = 0 \quad (5.48)$$

où :

$$g_{k+1,p} = \sqrt{(R + u_t^p(x=R))^2 + v_f^{p2}(x=R)} - \left[ R_{stat} - \frac{h}{2} - u_s^p(\theta) \right] \quad (5.49)$$

$$\mathbf{C}_{\mathbf{N}_{k+1,p}} = \begin{bmatrix} -n \sin(n\theta) \\ n \cos(n\theta) \\ \frac{R + u_t^p(x=R)}{\sqrt{(R + u_t^p(x=R))^2 + v_f^p(x=R)^2}} \\ \frac{v_f^p(x=R)}{\sqrt{(R + u_t^p(x=R))^2 + v_f^p(x=R)^2}} \end{bmatrix} \quad (5.50)$$

$n$  étant le mode d'anneau considéré. Dans l'expression 5.48,  $\mathbf{U}$  représente le vecteur des degrés de liberté du système (Cf. annexe A).

La seconde condition à vérifier, qui n'est autre que l'équilibre des forces, doit cette fois-ci prendre en compte le frottement. La composante normale de la force de contact peut être exprimée comme dans la section 3.4, par l'équation 3.92 :

$$\mathbf{F}_{\text{contact}N} = -\mathbf{C}_N \lambda_N \quad (5.51)$$

où l'expression de  $\mathbf{C}_N$  est donnée par la relation 5.50 .

La force de frottement est introduite par l'intermédiaire de son travail qui, dans le cas d'un contact frottant entre l'aube et le stator, à la position angulaire  $\theta$ , s'exprime par :

$$W_T^{ML} = T \left[ w(\theta) \left\{ 1 - \frac{h}{2R_{stat}} \right\} - \frac{h}{2R_{stat}} \frac{\partial u_s}{\partial \phi}(\theta) - v_f(x=R) \right] \quad (5.52)$$

avec

$$T = \mu \lambda_N \text{sign}(V_{slip}) \quad (5.53)$$

où

$$\begin{aligned} V_{slip} = & \dot{v}_f(x=R) + \Omega (R + u_t(x=R)) \\ & - \Omega \left( \dot{w}(\theta) \left\{ 1 - \frac{h}{2R_{stat}} \right\} - \frac{h}{2R_{stat}} \frac{\partial \dot{u}_s}{\partial \phi}(\theta) \right. \\ & \left. - \Omega \left( \frac{\partial \dot{w}}{\partial \phi}(\theta) \left\{ 1 - \frac{h}{2R_{stat}} \right\} - \frac{h}{2R_{stat}} \frac{\partial^2 u_s}{\partial^2 \phi}(\theta) \right) \right) \end{aligned} \quad (5.54)$$

La composante tangentielle de la force de contact qui en résulte est donnée par :

$$\mathbf{F}_{\text{contact}T} = -\mathbf{C}_T \lambda_N \quad (5.55)$$



avec

$$\mathbf{C}_T = \text{sign}(V_{slip}) \mu \begin{bmatrix} -\left(1 - \frac{h}{2R_{stat}}\right) \cos(n\theta) \\ -\left(1 - \frac{h}{2R_{stat}}\right) \sin(n\theta) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.56)$$

Ainsi, la force de contact s'exprime par :

$$\mathbf{F}_{\text{contact}} = \mathbf{F}_{\text{contact}N} + \mathbf{F}_{\text{contact}T} = -[\mathbf{C}_N + \mathbf{C}_T] \lambda_N = -\mathbf{C}_{NT} \lambda_N \quad (5.57)$$

Les conditions de compatibilité des déplacements et d'équilibre en forces que doivent vérifier les degrés de liberté corrigés s'écrivent, dans le cas de plusieurs contacts, comme les équations 5.48 et 3.87 mais, sous forme vectorielle :

$$-\mathbf{g}_{k+1} \approx -(\mathbf{g}_{k+1,p} + \mathbf{C}_{N_{k+1,p}}^T \mathbf{U}_{k+1,c}) = 0 \quad (5.58)$$

$$\left( \frac{\mathbf{M}}{\Delta t^2} + \frac{\tilde{\mathbf{C}}}{2\Delta t} \right) \mathbf{U}_{k+1,c} = -\mathbf{C}_{NT_{k+1,p}} \lambda_{N_{k+1}} \quad (5.59)$$

Les degrés de liberté corrigés qui en résultent s'expriment alors par :

$$\lambda_{N_{k+1}} = \left[ \mathbf{C}_{N_{k+1,p}}^T \left( \frac{\mathbf{M}}{\Delta t^2} + \frac{\tilde{\mathbf{C}}}{2\Delta t} \right)^{-1} \mathbf{C}_{NT_{k+1,p}} \right]^{-1} \mathbf{g}_{k+1,p} \quad (5.60)$$

$$\mathbf{U}_{k+1,c} = - \left( \frac{\mathbf{M}}{\Delta t^2} + \frac{\tilde{\mathbf{C}}}{2\Delta t} \right)^{-1} \mathbf{C}_{NT_{k+1,p}} \lambda_{N_{k+1}} \quad (5.61)$$

Dans ce qui suit, le comportement dynamique de ce système va être étudié, selon la procédure explicitée ci-dessus, dans un premier temps en négligeant le frottement lors du contact entre les aubes et le carter puis, en considérant ce dernier.

### 5.2.2 Comportement dynamique du système sans frottement

Dans cette partie, le contact entre les aubes et l'anneau est supposé glissant, sans frottement. Nous allons étudier le comportement dynamique de ce système aux vitesses de rotations où celui-ci a été précédemment étudié dans le cas où le contact était maintenu. La figure 5.38 montre le comportement dynamique du système possédant un carter linéaire à  $\Omega = 286,5$  tr/min et  $\Omega = 668,5$  tr/min, c'est-à-dire avant la plage  $[\Omega_c, \Omega_{c_2}]$  et, entre  $\Omega_{c_2}$  et  $\Omega_{mc}$ . Il s'avère qu'à ces vitesses de rotation, le système adopte une configuration statique où l'aube et le carter sont en contact permanent. Dans ces plages de vitesses de rotation, le comportement du système est donc le même que dans le cas où les contacts étaient imposés (Cf. figure 5.9). Les figures 5.39 (a) et (b) représentent le déplacement radial de l'anneau linéaire excité par une aube tournant à  $\Omega = 310$  tr/min et  $\Omega = 4774,5$  tr/min soit, entre  $\Omega_c$  et  $\Omega_{c_2}$  et, après  $\Omega_{mc}$ . A ces vitesses, bien que l'aube puisse se détacher du carter, le système se comporte comme dans le

cas où le contact était imposé c'est-à-dire que le système diverge dans le premier cas, au sens où l'anneau atteint brutalement (c'est-à-dire sans oscillations) une amplitude non réaliste, et flotte dans le second. Sur ces figures, il a été choisis de représenter le déplacement radial de l'anneau  $u_s$  au lieu de la norme de son déplacement pour mettre en évidence la réponse en opposition de phase de ce dernier. En effet, conformément à la figure 5.1,  $u_s$  est positif lorsqu'il est orienté vers le centre de l'anneau. Ainsi, bien que l'aube agisse de façon centrifuge sur le carter, celui-ci va au contraire, répondre en opposition de phase par rapport à l'excitation qu'il subit par l'aube. Ceci explique que, bien que l'amplitude de réponse de l'anneau ne soit pas réaliste, le contact est maintenu entre les deux structures à  $\Omega = 310$  tr/min comme le montre la figure 5.39 (c). A  $\Omega = 4774,5$  tr/min (vitesse qui se trouve dans la plage de flottement du système linéaire en contact permanent), le carter linéaire adopte également des amplitudes non réalistes mais avec une succession de prises de contact comme le montre la figure 5.39 (d).

Comme dans le cas précédent, il convient donc de prendre en compte les non linéarités liées aux grands débattements de l'anneau. Le comportement dynamique de ce système non linéaire, à  $\Omega = 310$  tr/min et  $\Omega = 4774,5$  tr/min est représenté sur les figures 5.40 (a) et (b) respectivement dans le cas de raideurs cubiques  $K_{NL} = 1.10^5 \text{ N.m}^{-1}$ . Dans le cas de la divergence de l'anneau, il en résulte que ses amplitudes sont désormais réalistes, ce qui n'est pas le cas du comportement du système lors de la coalescence des modes du carter (Cf. figure 5.40 (b)). Le choix de la valeur des raideurs non linéaires du carter apparaît donc particulièrement délicat afin d'avoir une dynamique proche de la réalité. Des raideurs cubiques de valeur  $k_{NL} = 1.10^7 \text{ N.m}^{-1}$  permettent d'obtenir des amplitudes plus réalistes, comme le montre la figure 5.41. Par contre, dans ce cas, l'aube est en contact permanent avec le carter, comme en témoigne l'évolution des jeux entre les deux structures représentée sur la figure 5.41 (b).

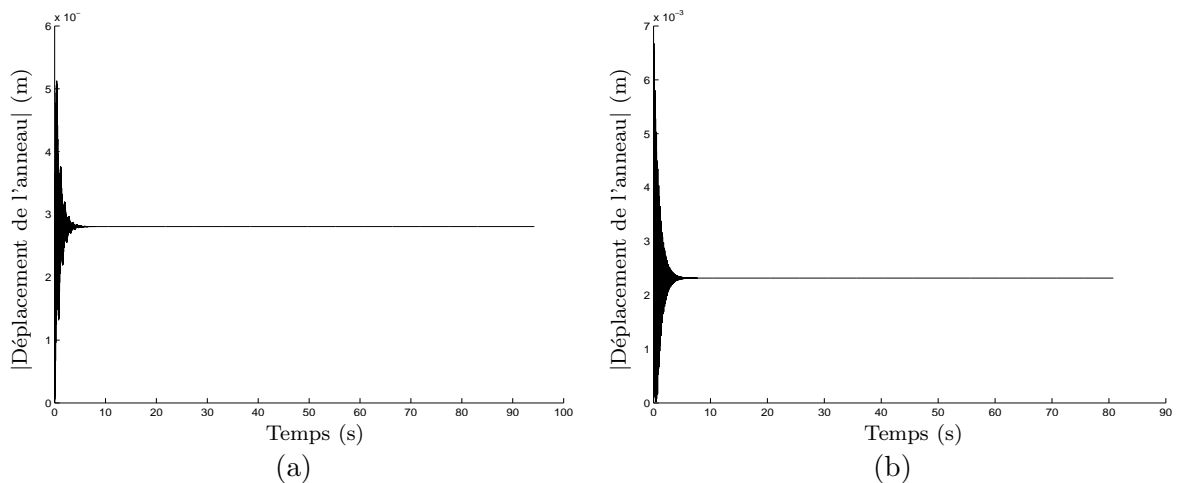


FIG. 5.38 – Comportement dynamique du mode à trois diamètres nodaux du carter linéaire excité par une aube ayant un degré de liberté de traction/compression, glissant sans frottement à (a)  $\Omega = 286,5$  tr/min et (b)  $\Omega = 668,5$  tr/min

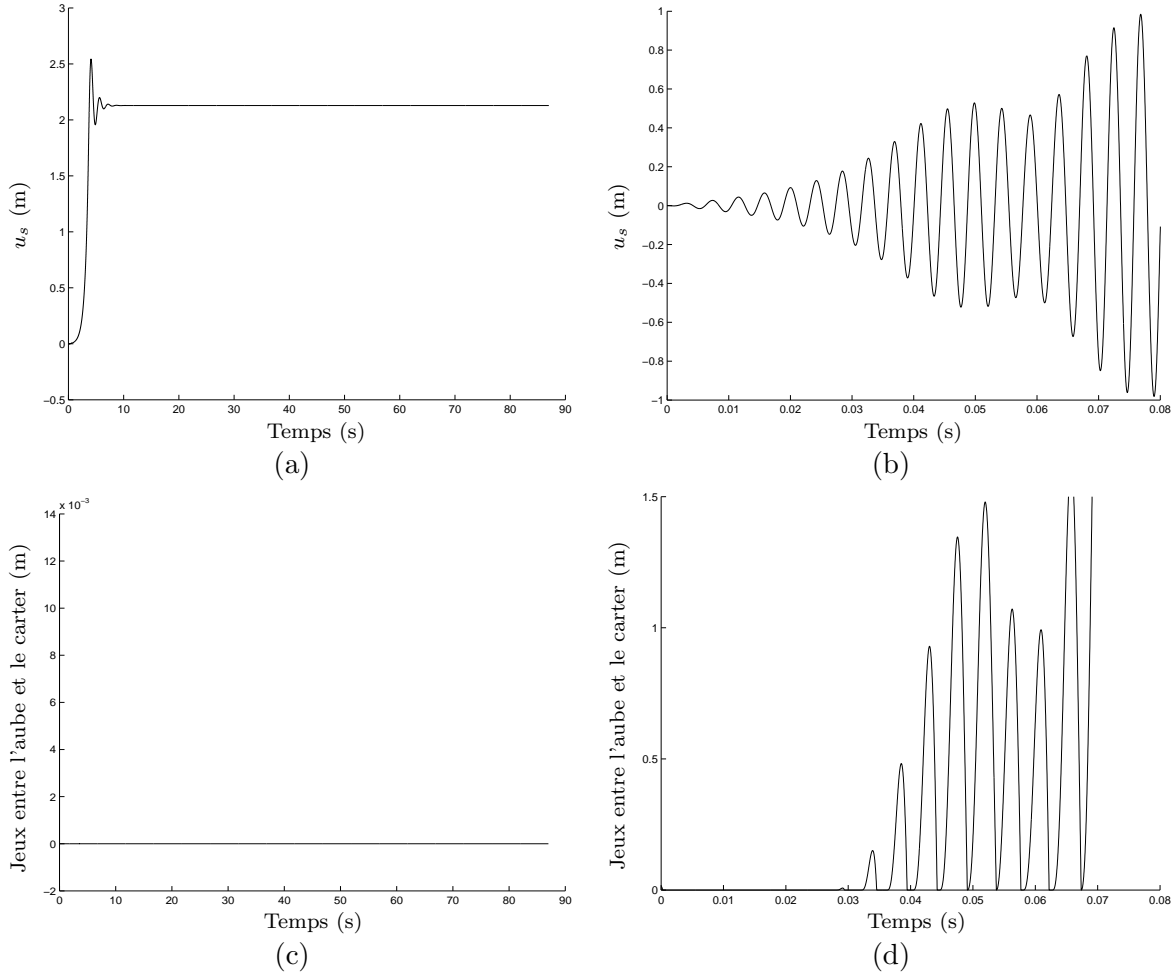


FIG. 5.39 – Déplacement radial du mode à trois diamètres nodaux du carter linéaire excité par une aube ayant un degré de liberté de traction/compression, glissant sans frottement à (a)  $\Omega = 310$  tr/min, (b)  $\Omega = 4774,5$  tr/min, (c) évolution des jeux entre l'aube et le carter à  $\Omega = 310$  tr/min et (d), à  $\Omega = 4774,5$  tr/min

Enfin, pour terminer, il est possible de faire le lien entre la dynamique de ce système et celle mise en évidence par Wildheim [94] dans le cas de deux structures vibrantes interagissant. Considérons donc le cas de contacts sans frottement, entre le carter linéaire non amorti et une aube ne possédant qu'un degré de liberté de traction/compression tournant à une vitesse de rotation se trouvant après la vitesse critique de l'anneau. Comme nous l'avons déjà signalé, après la vitesse critique de ce dernier, qui correspond à sa résonance, sa réponse est en opposition de phase avec son excitation. Ainsi, après  $\Omega_c$ , le système non amorti adopte un comportement vibratoire auto-entretenu comme l'illustre la figure 5.42 (a), pour une vitesse de rotation de l'aube de  $\Omega = 668,5$  tr/min. Le système consiste alors en un anneau élastique vibrant à sa fréquence propre ( $f_{stat} = 15,20$  Hz pour le mode à trois diamètres nodaux) excité par un autre système d'inertie moindre vibrant lui aussi à sa fréquence propre ( $f_{aube} = 50,32$  Hz avec les paramètres choisis) et tournant à la vitesse  $\Omega$ . Il a été montré par Wildheim [94] que la fréquence

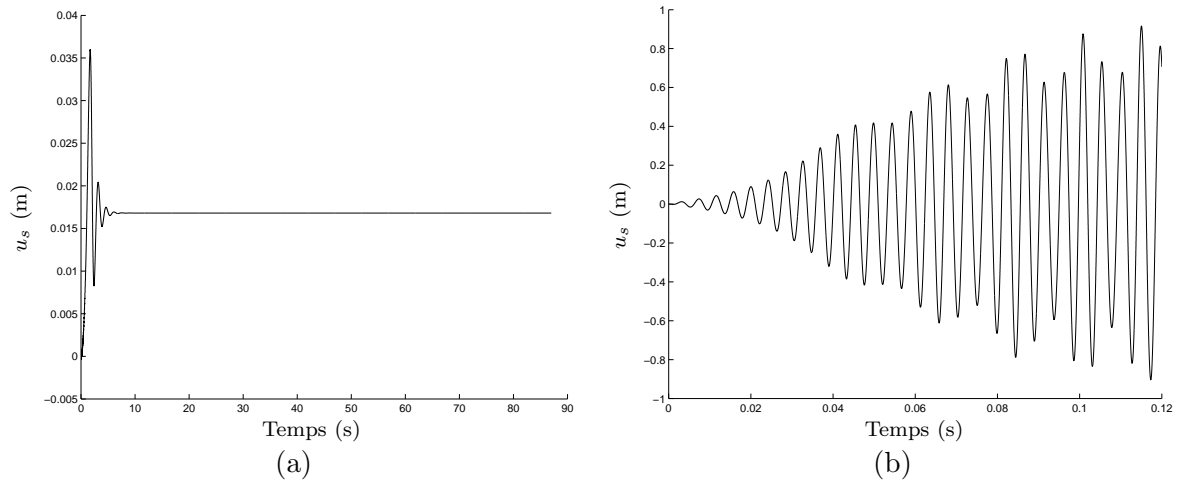


FIG. 5.40 – Déplacement radial du mode à trois diamètres nodaux du carter non linéaire avec  $k_{NL} = 1.10^5 \text{ N.m}^{-1}$  excité par une aube ayant un degré de liberté de traction/compression, glissant sans frottement à (a)  $\Omega = 310 \text{ tr/min}$ , (b)  $\Omega = 4774,5 \text{ tr/min}$

de réponse de ce type de système vérifie la relation  $f_{\text{systeme}} = n \frac{\Omega}{2\pi} \pm f_{\text{stat}}$ . La figure 5.42 (b), représentant le spectre de la figure 5.42 (a), confirme bien cette relation et valide une fois de plus ce modèle d'interaction entre une structure fixe axisymétrique et une structure tournante.

Ainsi, le fait que les aubes puissent se décoller du carter ne change pas radicalement le comportement global du système puisque du fait de l'opposition de phase de l'anneau après sa vitesse critique, on se ramène à des régimes où les structures sont en contact permanent. Il convient, pour terminer, d'étudier l'influence du frottement sur le comportement dynamique du système où les deux structures peuvent se décoller.

### 5.2.3 Comportement dynamique du système avec frottement

Comme dans le cas où le contact entre aubes et carter était maintenu, nous allons étudier l'influence du frottement sur la dynamique du système lorsque celles-ci peuvent se décoller du stator. Pour cela, nous allons comme précédemment étudier le comportement de ce système dans une plage de vitesse de rotation pour laquelle le système linéaire est stable sans frottement. Pour les raisons évoquées lors de l'étude de l'influence du frottement sur le système à contacts permanents (Cf. section 5.1.3.2), et pour pouvoir constater l'influence des décollements possibles des aubes, le coefficient de frottement considéré sera de  $\mu = 1.8$ . La figure 5.43 représente ainsi l'évolution, au cours du temps, des différents degrés de liberté du même système que dans le cas de la figure 5.35 mais, lorsque l'aube peut se décoller du carter. Cette fois-ci, le comportement de ce système est constitué d'une succession de phases de contact puis de décollement. Il faut noter que, contrairement aux figures précédentes, il s'agit de l'opposé du déplacement radial de l'anneau qui est représenté afin de comparer plus aisément le déplacement de ce dernier avec celui de l'aube. On voit ainsi que dès que les deux structures entrent en contact, le jeu s'annule et, l'aube fléchit dans le sens opposé à la vitesse de rotation. En fait, il s'agit

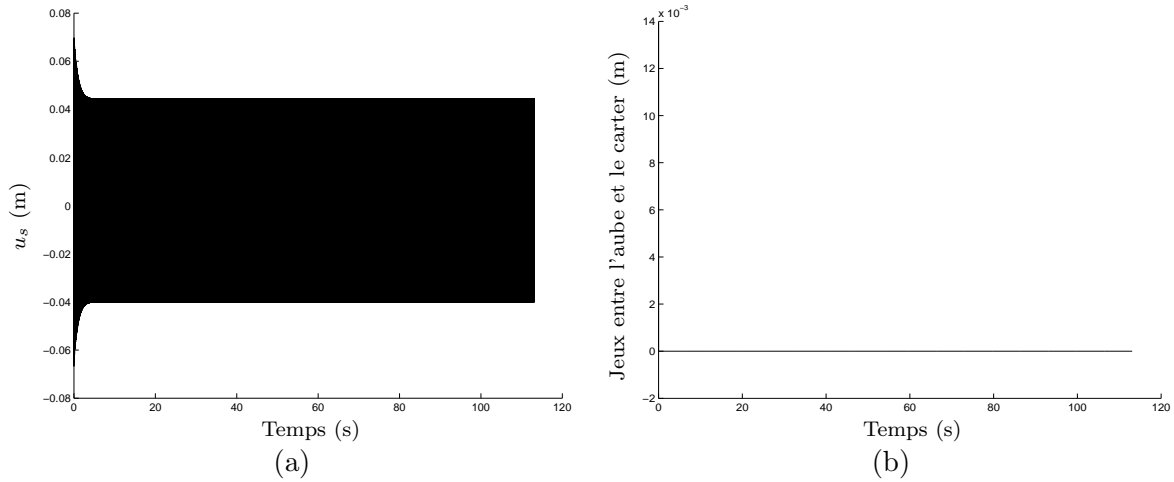


FIG. 5.41 – (a) Déplacement radial du mode à trois diamètres nodaux du carter non linéaire avec  $k_{NL} = 1.10^7 \text{ N.m}^{-1}$  excité par une aube ayant un degré de liberté de traction/compression, glissant sans frottement à (a)  $\Omega = 4774,5 \text{ tr/min}$ , (b) évolution des jeux entre les deux structures

du mode rétrograde de l'anneau qui est excité par le frottement, comme l'ont montré les études de stabilité réalisées en section 5.1.3 du chapitre 5. Il en résulte la propagation d'une onde, elle aussi rétrograde, le long du carter qui provoque une modulation de la compression de l'aube au cours du temps, comme en témoigne l'évolution de  $u_s$  sur la figure 5.43. Ainsi, lorsque cette compression diminue, la force de frottement s'amoindrit également puisque selon le modèle employé (Coulomb), elle est proportionnelle à l'effort normal de contact. Sa flexion diminue même jusqu'à s'annuler et devenir positive lorsque les deux structures sont décollées (Cf.  $v_f$  sur la figure 5.43). Du fait de son inertie propre, le fléchissement de l'aube va redevenir négatif alors même que les structures sont toujours décollées. Lorsque le contact est repris, son fléchissement s'accroît subitement comme le montre la discontinuité de la courbe associée sur la figure 5.43 et ainsi de suite. On peut préciser que pour des coefficients de frottement plus faibles, les aubes ne se décollent pas du carter et le système se comporte comme dans le cas où les contacts permanents sont imposés (Cf. section 5.1.3.2).

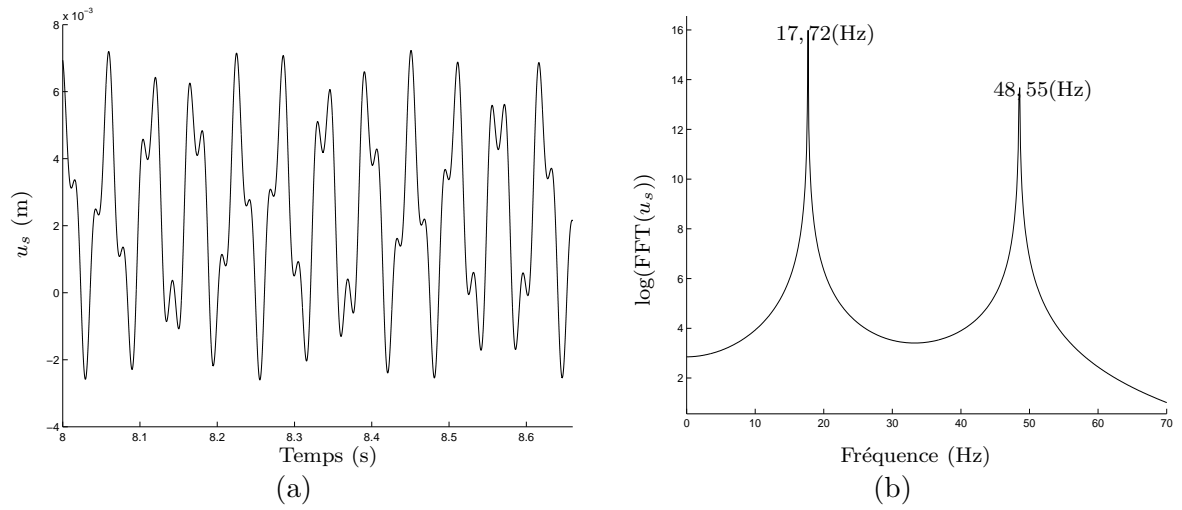


FIG. 5.42 – (a) Déplacement radial du mode à trois diamètres nodaux du carter linéaire conservatif excité par une aube ayant un degré de liberté de traction/compression, glissant sans frottement à (a)  $\Omega = 668,5,5$  tr/min, (b) spectre du signal

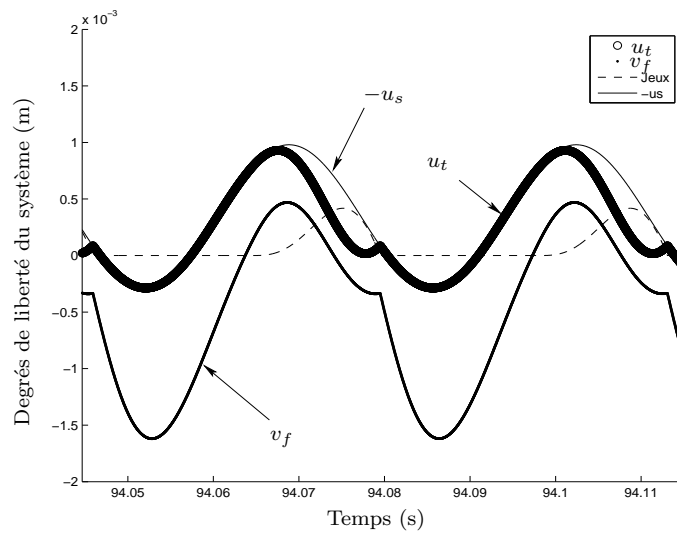


FIG. 5.43 – Evolution des degrés de liberté d'un système constitué d'un anneau élastique linéaire dont le troisième mode est excité par une aube de mêmes paramètres modaux en traction/compression et en flexion, tournant à  $\Omega = 286,5$  tr/min et avec  $\mu = 1.8$

### 5.3 Conclusion

Dans ce chapitre, des modèles simples d'interaction rotor/stator ont été réalisés afin d'appréhender les phénomènes prédominants lors de l'interaction entre des aubes tournantes et un carter élastique. Il s'avère ainsi que ce dernier peut être instable dans plusieurs plages de vitesse de rotation du fait du simple déplacement d'une charge dynamique sur cette structure élastique. Le carter peut ainsi diverger dans le repère tournant au voisinage de sa vitesse critique ou se coupler avec le mode de flexion d'une des aubes ou encore flotter à partir d'une certaine vitesse de rotation seuil. Le comportement dynamique de ce système linéaire a confirmé ces instabilités potentielles. Afin d'obtenir des amplitudes de vibrations réalistes pour ce système, dans ces plages instables, les non linéarités liées aux grands déplacements de celui-ci ont été modélisées. Il s'en suit que, puisque l'anneau répond en opposition de phase par rapport à ses excitations après sa vitesse critique, ce système non linéaire adopte comme positions d'équilibre stable, des configurations à contacts permanents avec les aubes. Lorsque le frottement, qui est une autre non linéarité, est considéré, des régimes périodiques constitués de phases de collements et de décollements ont été mis en évidence.

Les phénomènes principaux intervenant lors de l'interaction entre des aubes tournantes et un carter élastique ayant été observés et compris, un modèle d'interaction plus sophistiqué va pouvoir être développé afin d'étudier cette interaction de façon plus complète et réaliste.

## Chapitre 6

# Modèle complet de contact rotor-stator

Dans ce chapitre, l'interaction entre les aubes d'un rotor de turboréacteur et le carter en vis-à-vis sera étudiée plus finement. Pour cela, un modèle complet de rotor flexible aubagé sera développé dans le repère tournant. Ce modèle permettra d'effectuer des études de stabilité pour une structure aubagée rotative et validera le modèle de rotor. Le contact entre ce rotor et un carter sera ensuite analysé. Dans un premier temps, le frottement sera négligé. Des positions d'équilibre statiques puis dynamiques seront alors recherchées. Enfin, le frottement sera considéré lors de l'interaction et le comportement dynamique du système qui en résulte sera mis en évidence.

### 6.1 Modèle de rotor flexible aubagé

#### 6.1.1 Formulation

Le modèle développé par la suite se base sur les considérations énergétiques d'un modèle précédemment développé par Sinha [81]. Le rotor considéré, représenté sur la figure 6.1, est entièrement modélisé dans le repère tournant. Il consiste en un arbre modélisé par une poutre d'Euler-Bernoulli, soutenu par trois paliers. Cet arbre est connecté à un disque rigide sur lequel sont encastrées des aubes modélisées par des poutres d'Euler-Bernoulli.

Deux translations, perpendiculaires entre elles,  $u(z, t)$  et  $v(z, t)$ , dans le plan du disque et liées au repère corotationnel, sont considérées pour l'arbre. Chaque aube possède un mouvement de flexion  $\eta(s, t)$ , comme le montre la figure 6.2. Une approximation de Rayleigh-Ritz est utilisée pour exprimer ces déplacements. Ainsi, ces derniers sont exprimés par les combinaisons de fonctions de Ritz suivantes :

$$u(z, t) = U_0(t) + \sum_{m=1}^{m_{tot}} U_m(t) W_m(z) \quad (6.1)$$

$$v(z, t) = V_0(t) + \sum_{m=1}^{m_{tot}} V_m(t) W_m(z) \quad (6.2)$$



$$\eta(s, t) = \sum_{n=1}^{n_{tot}} (X_n(t))_j (Y_n(s))_j \quad (6.3)$$

où  $z$  est l'abscisse le long de l'arbre et  $s$ , l'abscisse curviligne le long des aubes. Dans ces expressions,  $U_0(t)$  et  $V_0(t)$  représentent des déplacements de corps rigide de l'arbre,  $m_{tot}$  et  $n_{tot}$ , le nombre de modes considérés pour exprimer les mouvements de flexion de l'arbre et de la  $j^{\text{ème}}$  aube respectivement. Dans cette approche, les fonctions de forme doivent vérifier les conditions cinématiques du problème. Ainsi, les fonctions de Ritz des aubes doivent vérifier les conditions cinématiques d'encastrement des pieds d'aubes dans le disque rigide, soient :  $Y_n(0) = 0$  et  $Y'_n(0) = 0$ , où le symbole *prime* désigne une différenciation par rapport à la variable d'espace. Les fonctions de forme alors choisies pour les aubes ont les expressions suivantes :

$$Y_n(s) = a_n s + \sin(\beta_n s) \text{ avec } \beta_n = (2n - 1)\pi/(2L), \text{ et } a_n = -\beta_n \quad (6.4)$$

Concernant l'arbre, puisque celui-ci est supporté par des paliers, ses fonctions de Ritz n'ont pas de conditions cinématiques à vérifier. Les fonctions choisies ont les expressions suivantes :

$$W_m(z) = 1 - \cos(\alpha_m z) \text{ avec } \alpha_m = (2m - 1)\pi/(2l) \quad (6.5)$$

Les fonctions de Ritz retenues pour ce modèle sont très semblables à celles utilisées par Sinha [81] et ce, afin de pouvoir comparer les deux modèles. Il faut cependant noter que ces fonctions de forme imposent une rotation des sections droites de l'arbre nulle à son extrémité opposée au disque aubagé c'est-à-dire  $W'_m(0) = 0$  en  $z = 0$ .

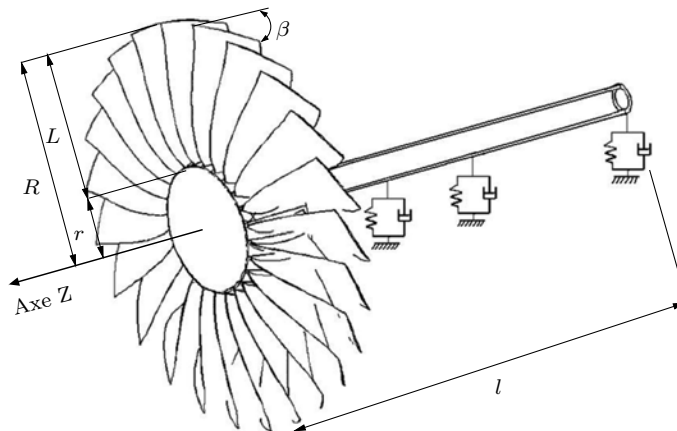


FIG. 6.1 – Modèle de rotor flexible aubagé

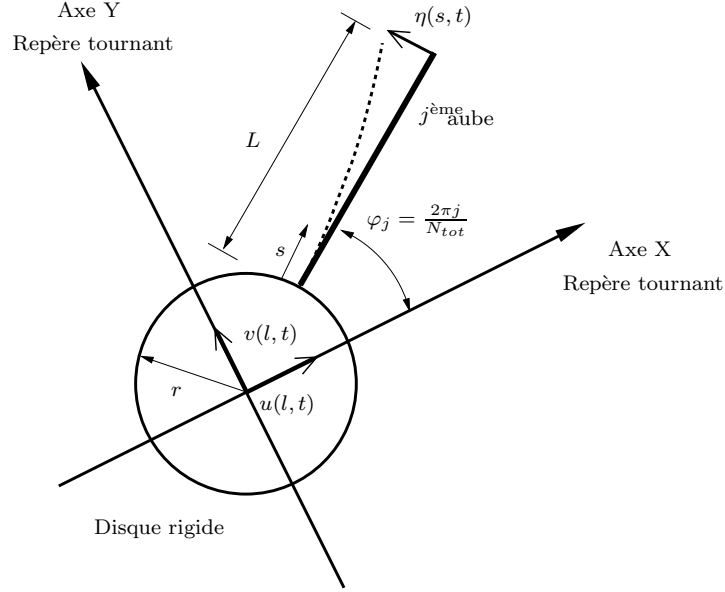


FIG. 6.2 – Vue de face du disque aubagé

La mise en œuvre de cette méthode énergétique passe par la définition d'un certain nombre d'énergies et de potentiels. Le modèle a été développé essentiellement dans le repère corotationnel afin de s'affranchir des termes temporels périodiques provenant de la description d'une structure périodique en rotation. Dans ce repère, une énergie cinétique  $T_{blade}$  associée à la  $j^{\text{ème}}$  aube, située à l'angle  $\phi_j = \frac{2\pi j}{N_{tot}}$  dans le repère tournant (où  $N_{tot}$  représente le nombre total d'aubes), peut être définie par :

$$T_{blade} = \int_0^L \frac{1}{2} \rho_b S_b \vec{V}_{S/R_0}^2(G) ds + \int_0^L \frac{1}{2} \vec{\Omega}_{S/R_0}^T \mathbf{I} \vec{\Omega}_{S/R_0} ds \quad (6.6)$$

où  $\rho_b$  et  $S_b$  sont la densité et l'aire d'une section droite de l'aube,  $\vec{V}_{S/R_0}(G)$ ,  $\vec{\Omega}_{S/R_0}$  et  $\mathbf{I}$  étant respectivement la vitesse et le vecteur vitesse de rotation absolues du centre de gravité de la section droite et sa matrice d'inertie définie dans son repère inertiel. Il est utile de préciser qu'afin d'obtenir une forme quadratique correcte pour cette énergie cinétique, il est nécessaire de développer le vecteur rotation du centre de masse d'une section droite de l'aube au second ordre sans quoi, des termes non négligeables pour une structure ayant de fortes inerties de rotation seraient absents [82] et conduiraient alors à des instabilités injustifiées.

De la même façon, une énergie interne de déformations élastiques  $\nu_{int_{blade}}$ , une fonction de dissipation  $F_{d_{blade}}$  associée à l'amortissement interne ainsi qu'un potentiel de pré-contrainte :

$$\nu_{g_{blade}} = \frac{1}{2} \int_0^L \rho_b S_b \Omega^2 \left[ \frac{R^2 - (s+r)^2}{2} \right] \eta'^2(s, t) ds \quad (6.7)$$

prenant en compte les effets centrifuges sur la  $j^{\text{ème}}$  aube sont définis.

Concernant l'arbre, une énergie cinétique  $T_{shaft}$ , une énergie interne de déformations élastiques  $\nu_{int_{shaft}}$  ainsi qu'une fonction de dissipation  $F_{d_{shaft}}$  lui sont associées. Les paliers sont pris en compte par l'intermédiaire d'un potentiel associé à leur raideur  $\nu_{bearings}$  ainsi que par une fonction de dissipation  $F_{d_{bearings}}$  associée à leur amortissement. Les expressions de tous ces éléments sont détaillées en annexe C.

L'application des équations de Lagrange fournit l'équation matricielle régissant le comportement dynamique du rotor complet. Celle-ci peut se mettre sous la forme suivante :

$$\mathbf{M}_{rotor} \ddot{\mathbf{X}}_{rotor} + (\mathbf{D}_{rotor} + \mathbf{G}_{rotor}) \dot{\mathbf{X}}_{rotor} + (\mathbf{K}_{rotor} + \mathbf{K}_{geom_{rotor}} + \mathbf{N}_{rotor}) \mathbf{X}_{rotor} = \mathbf{0} \quad (6.8)$$

avec

$$\mathbf{X}_{rotor} = \begin{bmatrix} U_0 & V_0 & \dots & U_{m_{tot}} & V_{m_{tot}} & X_{11} & X_{21} & \dots & X_{n_{tot}1} & \dots & X_{1N_{tot}} & \dots & X_{n_{tot}N_{tot}} \end{bmatrix}^T \quad (6.9)$$

où  $\mathbf{X}_{rotor}$  est le vecteur des degrés de liberté généralisés de taille  $2m_{tot} + 2 + n_{tot}N_{tot}$  et où  $\mathbf{M}_{rotor}$ ,  $\mathbf{D}_{rotor}$ ,  $\mathbf{G}_{rotor}$ ,  $\mathbf{K}_{rotor}$ ,  $\mathbf{K}_{geom_{rotor}}$  et  $\mathbf{N}_{rotor}$  sont respectivement les matrices de masse, d'amortissement, gyroscopique, de raideur, de rigidification centrifuge et d'assouplissement centrifuge du rotor. Celles-ci peuvent être groupées en matrices de raideur et d'amortissement généralisées :

$$\tilde{\mathbf{C}}_{rotor} = \mathbf{D}_{rotor} + \mathbf{G}_{rotor} \quad (6.10)$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_{rotor} = \mathbf{K}_{rotor} + \mathbf{K}_{geom_{rotor}} + \mathbf{N}_{rotor} \quad (6.11)$$

Les éléments de l'équation matricielle 6.8 sont détaillés en annexe C.

### 6.1.2 Etudes de stabilité

La détermination des conditions de fonctionnement dangereuses ainsi que des zones de vibrations stables ou instables du rotor est primordiale pour un turboréacteur. La stabilité du rotor flexible aubagé peut se faire, comme précédemment, par la détermination des solutions  $\lambda = a + ib$  de l'équation caractéristique  $\det(\lambda^2 \mathbf{M}_{rotor} + \lambda \tilde{\mathbf{C}}_{rotor} + \tilde{\mathbf{K}}_{rotor}) = 0$ , le système devenant instable dès lors qu'il existe une valeur propre  $\lambda$  possédant une partie réelle positive.

L'étude qui suit porte sur un rotor de 3,5 m de longueur supporté par trois paliers diagonaux situés à l'extrémité opposée au disque, à 3 m et à 3,25 m et dont les raideurs radiales et les coefficients d'amortissement radiaux visqueux valent  $k_{bearing} = 2.10^7 N.m^{-1}$  et  $D_{bearing} = 2.10^3 N.s.m^{-1}$ .

Nous allons, dans un premier temps, illustrer l'évolution des valeurs propres de ce rotor, en fonction de sa vitesse de rotation. Puis, la stabilité d'un rotor possédant deux aubes

diamétralement opposées, c'est-à-dire une structure possédant un déséquilibre inertiel, sera étudiée. L'influence de la longueur et de la flexibilité des aubes, ainsi que celle de leur angle de calage, sur la stabilité du système sera ainsi analysée. Enfin, l'effet déstabilisant de l'amortissement interne d'une structure en rotation sera montré.

Le diagramme de Campbell représenté sur la figure 6.3(a) illustre l'évolution des fréquences propres d'un **rotor flexible**, possédant 28 aubes de longueur 1 mètre. La figure 6.3(b) montre cette même évolution dans le plan complexe. Les évolutions des fréquences propres de l'arbre observées sur la figure 6.3(a) sont principalement dues aux effets gyroscopiques. Comme nous l'avons évoqué en section 1.3.4, dans le repère corotationnel, les courbes de pentes négatives représentent les modes directs (mouvements de précession dans le même sens que la rotation propre de l'arbre) et les courbes de pentes positives, les modes rétrogrades (mouvements de précession opposés à celui du mode direct) du système. L'évolution des fréquences propres des aubes (débutant à 31 Hz), c'est-à-dire leur raidissement, est due aux effets centrifuges pris en compte par le potentiel de pré-contrainte  $\nu_{gblade}$ . Deux phénomènes de loci veering [52, 75] sont visibles et repérés par les lettres A et B sur la figure 6.3. Dans ce cas précis, la répulsion des courbes est très peu marquée mais néanmoins visible, notamment sur la figure 6.3(b) au niveau des « boucles » attestant ainsi d'une rapide évolution des parties réelles du système (et donc de sa stabilité), sans changement des parties imaginaires associées. Au cours de ces répulsions, les modes concernés échangent leurs déformées ainsi que leurs sens de précession. Dans le cas présent, les évolutions des fréquences propres sur les figures 6.3(a) et 6.3(b) peuvent être corrélées et la stabilité de chaque mode ainsi déterminée. Pour cela, les extrémités de chaque courbe sont numérotées. Il apparaît que le système représenté sur la figure 6.3(b) est parfaitement stable.

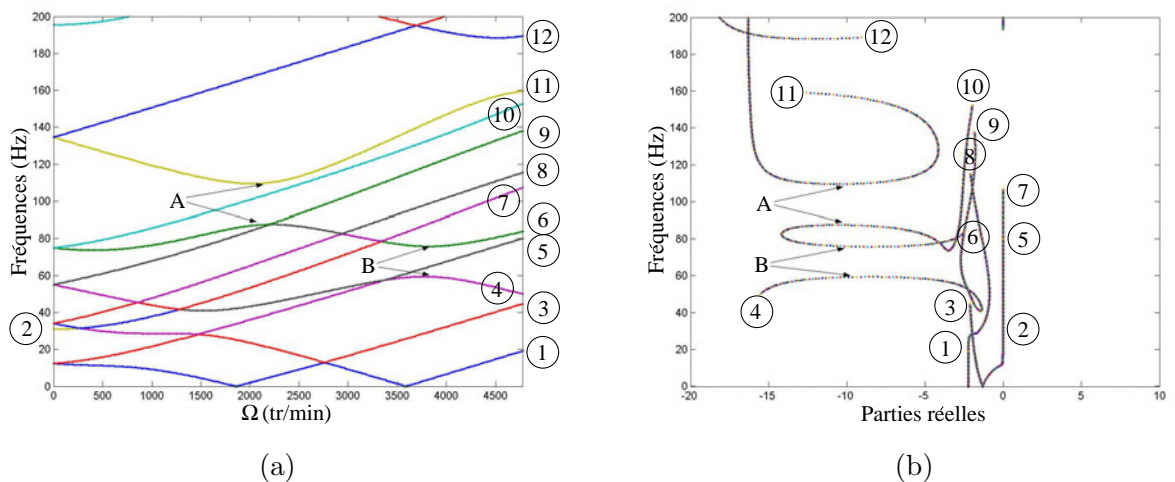


FIG. 6.3 – (a) Diagramme de Campbell (b) plan complexe pour un rotor ayant 28 aubes de longueur 1m

Dans le cas particulier d'un rotor ayant **deux aubes diamétralement opposées**, des phénomènes d'instabilités apparaissent et sont représentés sur le diagramme de Campbell en figure 6.4 de même que sur les figures 6.5(a) et 6.5(b) représentant respectivement l'évolution des fréquences propres dans le plan complexe et l'évolution des parties réelles des valeurs propres en fonction de la vitesse de rotation. Deux phénomènes d'instabilité, résultant tous deux d'une dissymétrie inertielle du rotor, sont observés. La première manifestation d'instabilité, notée ①, est classiquement répertoriée dans la littérature et apparaît à la première vitesse critique du système (à l'intersection avec l'axe des abscisses). La seconde, indiquée par les points ②b, ②c et ②d consiste en un couplage de modes : deux modes d'arbre (dans notre cas) à fréquences distinctes ont, à une certaine vitesse de rotation, la même fréquence, l'un étant stable et l'autre instable. Les points indexés par X1 et X2 ne représentent pas, dans cette configuration, des instabilités mais peuvent le devenir pour des dissymétries accentuées. Ainsi, la figure 6.6(a) représente une carte de stabilité pour un rotor ayant deux aubes, en fonction de la longueur de celles-ci ainsi que de la vitesse de rotation. La figure 6.6(b) représente les fréquences instables associées. Ces deux figures attestent bien des deux manifestations des instabilités évoquées précédemment (celles notées ① ayant lieu à 0Hz et celles notées ②a, ②b, ②c et ②d correspondant à des couplages de modes) puisque sur la figure 6.6(b) n'apparaissent que les fréquences instables non nulles (dans le repère corotationnel). La configuration notée X1 sur les figures 6.4 et 6.5 peut donc bien être instable si les aubes font plus de 1.1m de long. Ce cas est noté ②a sur la figure 6.6. Il en est de même pour la configuration X2 sur les figures 6.4 et 6.5 qui correspond à la zone ①, sur la figure 6.6, située juste avant 8000 tr/min pour des aubes de longueur supérieure à 1.1 m. La figure 6.6(a) montre également que jusqu'à 15 cm, la dissymétrie introduite par les deux aubes diamétralement opposées est suffisamment faible pour ne pas déstabiliser le système mais au delà de cette taille, il existe plusieurs plages de vitesse de rotation dans lesquelles le rotor peut être instable.

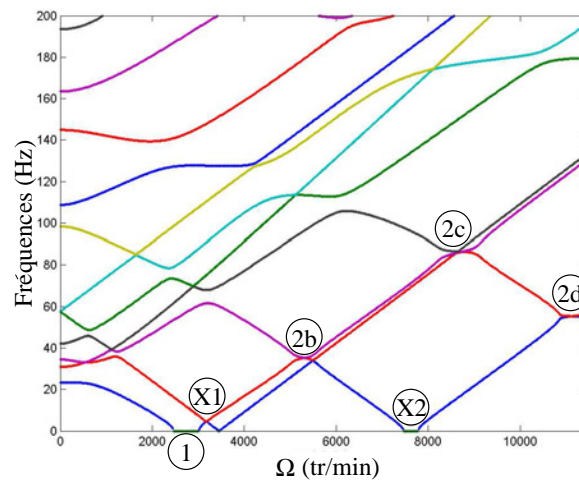


FIG. 6.4 – Diagramme de Campbell pour un rotor ayant 2 aubes diamétralement opposées

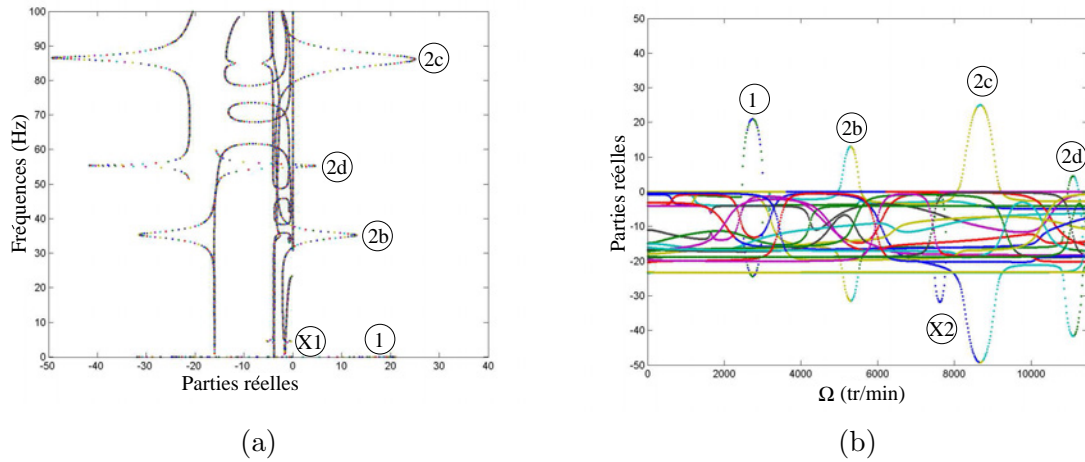


FIG. 6.5 – (a) Plan complexe (b) parties réelles pour un rotor ayant 2 aubes diamétralement opposées

Comme il a été précisé précédemment, ces instabilités résultent d'une dissymétrie inertielle du rotor. Cependant, **la flexibilité des aubes** peut influencer sur les zones d'instabilité. Les figures 6.7(a) et (b) représentent respectivement une carte de stabilité pour un rotor ayant deux aubes infiniment rigides, diamétralement opposées, ainsi que les fréquences d'instabilité associées. Les différences entre le cas présent et le précédant, concernent essentiellement la première plage de vitesse de rotation où apparaissent des instabilités. En effet, les fréquences auxquelles se produisent des couplages de modes entre 2000 tr/min et 4000 tr/min sont plus faibles en cas d'aubes rigides et la gamme de longueur d'aube concernée est plus courte (Cf. figure 6.7(b) dans l'ellipse blanche). Ainsi, la dissymétrie inertielle engendrée par deux aubes infiniment rigides donne lieu à des couplages, à faibles fréquences, entre les modes horizontaux et verticaux du rotor entre 2000 tr/min et 4000 tr/min, si les aubes ont une taille comprise entre 1.1 m et 1.5 m (dans le cas d'aubes flexibles, si les fréquences propres de celles-ci sont proches de celles de l'arbre, les couplages de modes ayant lieu dans cette même gamme de vitesses de rotation commencent à partir d'une longueur d'aube supérieure à 1.1 m et concernent des modes mixtes d'aube et d'arbre).

Un autre paramètre peut influencer sur les zones d'instabilités observées précédemment. Il s'agit de **l'angle de calage** représenté sur la figure 6.8. Tous les cas étudiés jusqu'ici présentaient un angle de  $60^\circ$ . Les figures 6.9(a) et (b) représentent respectivement la carte de stabilité et les fréquences propres associées en fonction de l'angle de calage et de la vitesse de rotation d'un rotor ayant deux aubes flexibles diamétralement opposées. Les deux manifestations d'instabilités déjà évoquées sont également présentes. Il semble que plus l'angle de calage est grand, plus les gammes de vitesses de rotation où apparaissent des instabilités sont petites, ce qui paraît assez intuitif puisqu'à un angle de calage de  $90^\circ$ , les aubes sont dans le plan du disque. La carte de stabilité représentée sur la figure 6.9(a) montre également que des zones d'instabilité peuvent apparaître et disparaître en fonction de l'angle de calage, d'où l'importance de ce paramètre.

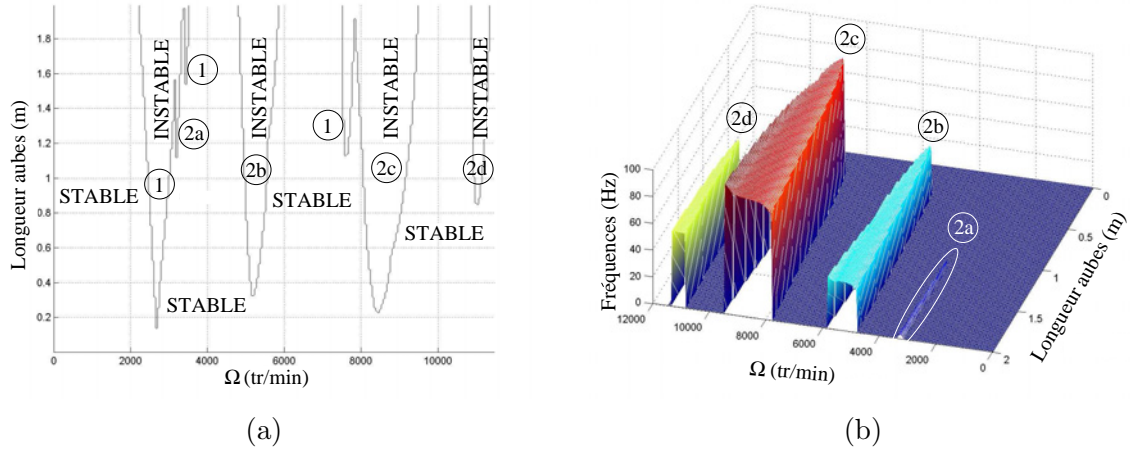


FIG. 6.6 – (a) Carte de stabilité (b) fréquences instables associées, pour un rotor ayant deux aubes flexibles diamétralement opposées en fonction de leur longueur et de la vitesse de rotation

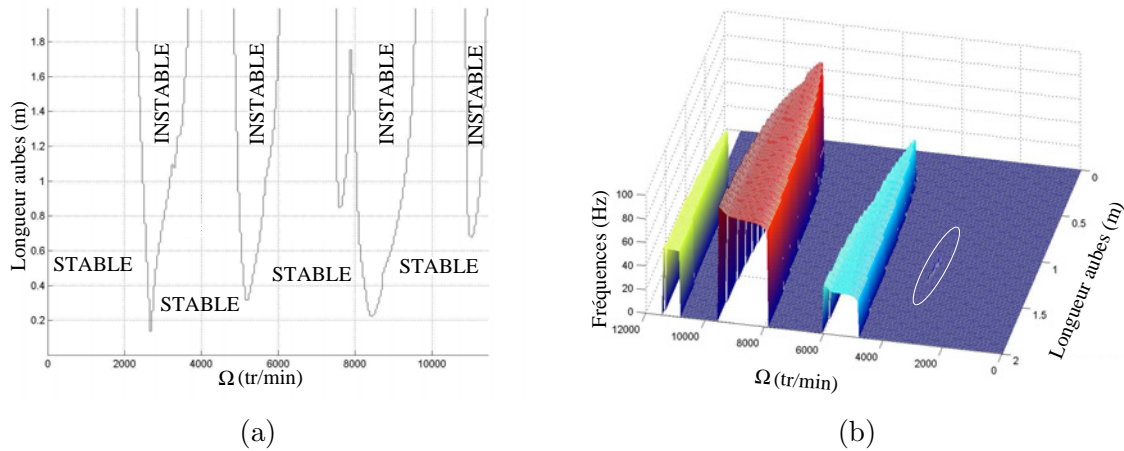


FIG. 6.7 – (a) Carte de stabilité (b) fréquences instables associées, pour un rotor ayant deux aubes rigides diamétralement opposées en fonction de leur longueur et de la vitesse de rotation

Pour clore cette partie sur les études de stabilité réalisables grâce au modèle de rotor flexible aubagé, nous allons illustrer l'effet déstabilisant de l'**amortissement tournant** d'une structure, effet que nous avons évoqué en section 1.3.5. Les figures 6.10(a) et (b) représentent respectivement un diagramme de Campbell et l'évolution des fréquences propres, dans le plan complexe, d'un rotor possédant six aubes flexibles et un unique amortissement interne au niveau de l'arbre dont le coefficient d'amortissement visqueux vaut  $\eta_s = 2.5 \cdot 10^{-5}$ . Dans ce cas, le taux d'amortissement visqueux pour trois modes d'arbre considérés vaut au plus 1,5%. Il apparaît bien, sur la figure 6.10(b), des valeurs propres ayant des parties réelles strictement

positives confirmant le caractère déstabilisant de l'amortissement tournant. Pour cette raison, dans toute la suite de l'étude, le rotor considéré ne sera amorti que par l'amortissement fixe de ses paliers, afin de ne pas « mélanger » les différents effets déstabilisants.

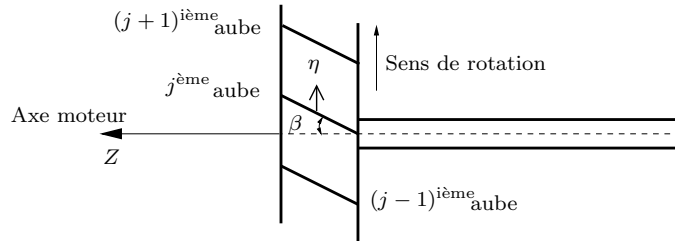
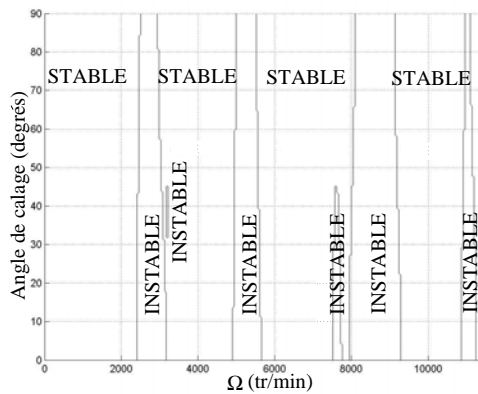
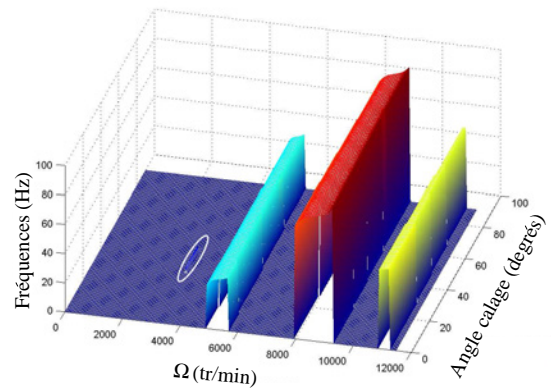


FIG. 6.8 – Vue de dessus du rotor, angle de calage des aubes  $\beta$



(a)



(b)

FIG. 6.9 – (a) Carte de stabilité (b) fréquences instables associées, pour un rotor ayant deux aubes flexibles diamétralement opposées en fonction de leur angle de calage et de la vitesse de rotation

Ainsi, le modèle de rotor développé dans cette étude est non seulement riche d'un point de vue phénoménologique mais aussi particulièrement bien adapté aux études de stabilité des systèmes tournants. En effet, les effets gyroscopiques, l'assouplissement centrifuge ainsi que la rigidification centrifuge sont pris en compte. La modélisation complète dans le repère corotationnel fournissant un système matriciel indépendant du temps, a permis de faire des études de stabilité paramétriques simples pour le rotor. Les rôles déstabilisants des dissymétries et de l'amortissement des parties tournantes d'un tel système ont ainsi été mis en évidence, de même que des phénomènes intéressants de locus veering ont pu être soulignés. L'aptitude du présent modèle à étudier les contacts entre les aubes du rotor et un carter constitue la prochaine section.



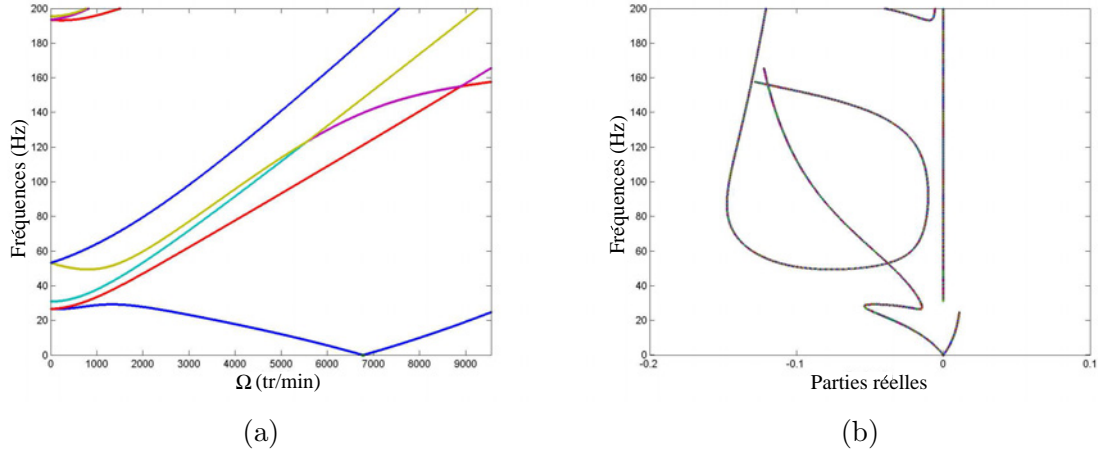


FIG. 6.10 – (a) Diagramme de Campbell d'un rotor à 6 aubes ayant uniquement un amortissement interne visqueux au niveau de l'arbre de coefficient  $\eta_s = 2.5.10^{-5}$ , (b) plan complexe associé

## 6.2 Contact sans frottement

Afin de faciliter la compréhension du comportement d'un rotor lors d'une prise de contact avec le carter en vis-à-vis, ce dernier va dans un premier temps être considéré comme infiniment rigide puis sa dynamique sera considérée. De plus, les effets de la gravité seront négligés dans toute cette étude.

### 6.2.1 Carter rigide

Dans cette section, le carter est infiniment rigide. Le rotor, quant à lui, possède six aubes flexibles d'une longueur de 1m et espacées chacune de  $60^\circ$ . La prise de contact entre ces deux structures est supposée résulter d'une force de balourd qui est d'ailleurs la seule force extérieure au système. Pour un balourd de 500 g.cm, situé à  $45^\circ$  dans le repère tournant, la réponse à balourd, selon les deux axes de ce repère, est tracée sur la figure 6.11.

Le contact est, comme dans les autres chapitres, traité par des multiplicateurs de Lagrange. Nous avons vu au chapitre 5, qu'une structure tournante impactant une structure fixe, pouvait adopter des configurations d'équilibre statique dans le repère corotationnel. Ceci étant vrai essentiellement pour des vitesses de rotation faibles, c'est-à-dire inférieures à la vitesse critique de la structure fixe, on peut s'attendre à ce que le rotor en contact avec un carter rigide adopte également des configurations d'équilibre statique. Nous allons donc étudier l'évolution du comportement de ce système, de façon quasi statique, au cours d'une augmentation progressive de la vitesse de rotation (et donc de la force de balourd). Cette façon de procéder, en quasi statique, revient à s'affranchir du régime transitoire du système, du à son inertie, et à rechercher uniquement l'équilibre des forces qui peut s'écrire :

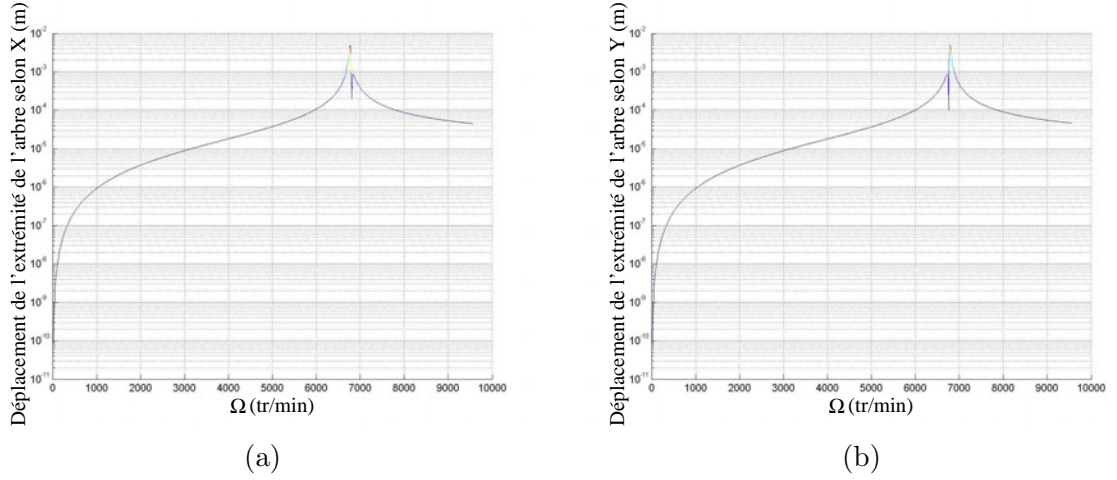


FIG. 6.11 – Réponse à balourd d'un rotor à 6 aubes, (a) selon l'axe X, (b) selon l'axe Y, dans le repère tournant, pour un balourd de 500 g.cm situé à 45° dans ce repère

$$\tilde{\mathbf{K}}_{rotor} \mathbf{X}_{rotor} = \mathbf{F}_{balourd} \quad (6.12)$$

où  $\mathbf{F}_{balourd}$  est la force de balourd et a pour composantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{balourd}(1) &= m_b \Omega^2 \cos \psi_b \\ \mathbf{F}_{balourd}(2) &= m_b \Omega^2 \sin \psi_b \\ &\vdots \\ \mathbf{F}_{balourd}(2m+1) &= m_b \Omega^2 \cos \psi_b W_m(l) \\ \mathbf{F}_{balourd}(2m+2) &= m_b \Omega^2 \sin \psi_b W_m(l) \\ &\vdots \\ \mathbf{F}_{balourd}(2m_{tot}+1) &= m_b \Omega^2 \cos \psi_b W_{m_{tot}}(l) \\ \mathbf{F}_{balourd}(2m_{tot}+2) &= m_b \Omega^2 \sin \psi_b W_{m_{tot}}(l) \end{aligned} \quad (6.13)$$

$m_b$  et  $\psi_b$  étant respectivement l'intensité du balourd et sa position angulaire dans le repère tournant. Ainsi, par exemple, à une vitesse  $\Omega = 5730$  tr/min, inférieure à la vitesse critique de l'arbre, l'amplitude de la réponse statique de celui-ci, obtenue par l'équation 6.12, vaut  $1,049 \cdot 10^{-4}$  m (Cf. figure 6.11). Donc si le jeu entre les aubes du rotor et le carter est de  $\delta = 100 \mu\text{m}$ , le contact aura lieu et les forces qui en résultent devront être prises en compte pour déterminer la réponse quasi statique du système.

Comme nous l'avons précisé au chapitre 2, section 2.1.5, à chaque contact entre une aube et le carter détecté, un multiplicateur de Lagrange doit être considéré. La contrainte de non-pénétration de l'aube dans le stator peut être insérée dans le problème en considérant, comme en section 3.4, le travail associé au multiplicateur suivant :

$$W_j^{ML} = \lambda_{N_j} (-g_j) \quad (6.14)$$

où  $g_j$  est le jeu entre la  $j^{\text{ème}}$  aube et le carter. Celui-ci peut s'exprimer, en première approximation par :

$$g_j = u(l, t) \cos \phi_j + v(l, t) \sin \phi_j - \delta \quad (6.15)$$

Il en résulte alors, après application des équations de Lagrange, des termes supplémentaires dans la matrice de raideur généralisée du système, dont la taille est augmentée du nombre de contact, ainsi qu'une force proportionnelle au jeu initial  $\delta$ . La matrice de raideur généralisée  $\tilde{\mathbf{K}}_{\text{rotor}+}$  à considérer dans le cas d'un contact sur l'aube  $j$  est constituée de la matrice  $\tilde{\mathbf{K}}_{\text{rotor}}$  ainsi que de la colonne et la ligne supplémentaires :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{K}}_{\text{rotor}+}(1, 2m_{\text{tot}} + 2 + n_{\text{tot}}N_{\text{tot}} + j) &= \cos \phi_j \\ \tilde{\mathbf{K}}_{\text{rotor}+}(2, 2m_{\text{tot}} + 2 + n_{\text{tot}}N_{\text{tot}} + j) &= \sin \phi_j \\ \tilde{\mathbf{K}}_{\text{rotor}+}(2m + 1, 2m_{\text{tot}} + 2 + n_{\text{tot}}N_{\text{tot}} + j) &= \cos \phi_j W_m(l) \\ \tilde{\mathbf{K}}_{\text{rotor}+}(2m + 2, 2m_{\text{tot}} + 2 + n_{\text{tot}}N_{\text{tot}} + j) &= \sin \phi_j W_m(l) \end{aligned} \quad (6.16)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{K}}_{\text{rotor}+}(2m_{\text{tot}} + 2 + n_{\text{tot}}N_{\text{tot}} + j, 1) &= \cos \phi_j \\ \tilde{\mathbf{K}}_{\text{rotor}+}(2m_{\text{tot}} + 2 + n_{\text{tot}}N_{\text{tot}} + j, 2) &= \sin \phi_j \\ \tilde{\mathbf{K}}_{\text{rotor}+}(2m_{\text{tot}} + 2 + n_{\text{tot}}N_{\text{tot}} + j, 2m + 1) &= \cos \phi_j W_m(l) \\ \tilde{\mathbf{K}}_{\text{rotor}+}(2m_{\text{tot}} + 2 + n_{\text{tot}}N_{\text{tot}} + j, 2m + 2) &= \sin \phi_j W_m(l) \end{aligned} \quad (6.17)$$

Quant à la force supplémentaire à prendre en compte, elle ne possède qu'un terme non nul sur le degré de liberté correspondant au multiplicateur. L'équation à résoudre en cas de contact est donc :

$$\left[ \tilde{\mathbf{K}}_{\text{rotor}+} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{\text{rotor}} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{\text{balourd}} \\ \delta \end{bmatrix} \quad (6.18)$$

où il y a bien sûr, autant de multiplicateurs de Lagrange  $\lambda$  que de contacts. Il en est de même concernant les termes  $\delta$  présents au second membre de cette équation.

L'évolution du chargement du système, c'est-à-dire de la force de balourd, va ainsi influencer sur sa configuration. En augmentant progressivement la vitesse de rotation du rotor, il est possible de suivre l'évolution des configurations d'équilibre du système en observant, par exemple, le jeu entre les aubes et le carter. Dans le cas du rotor possédant six aubes flexibles espacées régulièrement de  $60^\circ$  l'une de l'autre, comme illustré par la figure 6.12 (a), l'évolution de ces jeux est représentée sur la figure 6.12 (b), en fonction de la vitesse de rotation du rotor. Il apparaît donc qu'à  $\Omega = 5730$  tr/min, le rotor est bien en contact avec le stator et que celui-ci se fait au niveau de l'aube ① comme on pouvait s'en douter compte tenu de l'orientation de la force de balourd. La stabilité des positions d'équilibre statique du système ainsi obtenues peut être facilement déterminée puisqu'il s'agit de stabilité locale de points d'équilibre. Il est donc possible de procéder comme en section 5.1.2.1 du chapitre 5. Il se trouve que cette configuration d'équilibre statique où le rotor est en contact avec le stator sur l'aube ① est stable et il en est de même pour toutes les configurations décrites sur la figure 6.12 (b). Ces configurations obtenues par un algorithme quasi statique seront donc logiquement adoptées par le système. Ceci peut être validé par l'étude du comportement cette fois-ci dynamique du système. Dans

ce cas, la procédure est la même que celle détaillée en section 5.2.1 du chapitre 5 avec, dans le cas d'un contact sur la  $j^{\text{ème}}$  aube :

$$\mathbf{C}_{\mathbf{N}k+1,p} = \mathbf{C}_{\mathbf{N}\mathbf{T}k+1,p} = \begin{bmatrix} \cos\phi_j \\ \sin\phi_j \\ \vdots \\ \cos\phi_j W_m(l) \\ \sin\phi_j W_m(l) \\ \vdots \\ \cos\phi_j W_{m_{tot}}(l) \\ \sin\phi_j W_{m_{tot}}(l) \end{bmatrix} \quad (6.19)$$

Le résultat obtenu à la vitesse de rotation  $\Omega = 5730$  tr/min est représenté sur la figure 6.13. Comme attendu, le rotor adopte une configuration statique où il est en contact avec le carter rigide sur l'aube ①. Il faut préciser que la déformée du système, représentée sur la figure 6.13 (b), présente des déplacements amplifiés afin d'être observables.

Sur la figure 6.12 (b), on voit également que lorsque la vitesse de rotation augmente, l'aube ⑥ vient également au contact du carter et, une fois le système dans cette configuration, il n'évolue plus, dans la plage de vitesses de rotation considérée. Il peut être utile d'expliquer ce comportement puisque d'après la figure 6.10 (a), représentant le diagramme de Campbell du rotor, la vitesse critique de l'arbre se trouve à 6775 tr/min. En fait, il se trouve qu'une fois le contact établi sur l'aube ①, le degré de liberté physique du rotor dans cette direction est « bloqué » et donc, lorsque la vitesse augmente, le rotor ne pourra se déplacer que selon son second degré de liberté physique, orthogonal au premier d'où le contact sur l'aube ⑥. Par contre, une fois ces deux contacts, sur les aubes ① et ⑥ établis, les conditions aux limites du système ne sont plus celles d'un arbre libre à l'extrémité où se trouve le disque aubagé et donc, ce dernier ne possède plus de vitesse critique à 6775 tr/min d'où le fait que le rotor en contact sur deux aubes avec le carter ne subisse pas de changement de phase dans la plage de vitesses de rotation étudiée.

Pour terminer, on peut remarquer que le système précédent est obligé, lors d'une rampe de sa vitesse de rotation, de venir au contact du carter rigide sur deux aubes puisque, comme le montre la figure 6.14, le rotor en glissement permanent sur le stator, par l'intermédiaire d'une seule aube, est instable à partir de la vitesse critique de l'arbre à cause de la dissymétrie en raideur du système.

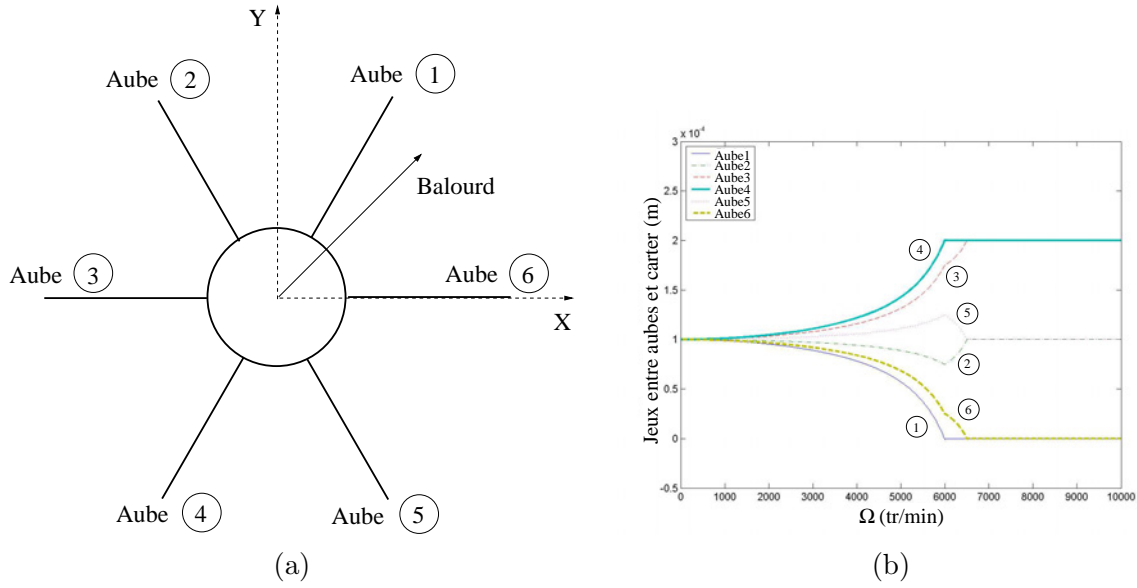


FIG. 6.12 – (a) Numérotation des aubes (b) évolution des jeux entre les aubes et le carter rigide

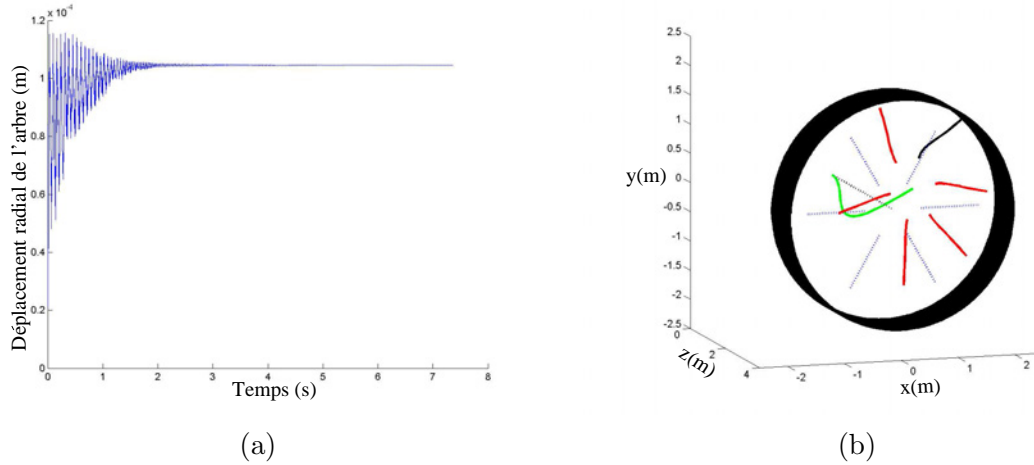


FIG. 6.13 – (a) Comportement dynamique (b) déformée associée à un rotor à 6 aubes en contact avec un stator rigide à 5730 tr/min, dans le repère tournant

Ainsi, la description du rotor dans le repère corotationnel permet de suivre l'évolution des positions d'équilibre statique du rotor en contact avec un stator rigide sans avoir à faire d'intégrations numériques, très coûteuses en temps. De plus, la stabilité de ses configurations d'équilibre est très facilement déterminée. Il convient maintenant de considérer un carter élastique.

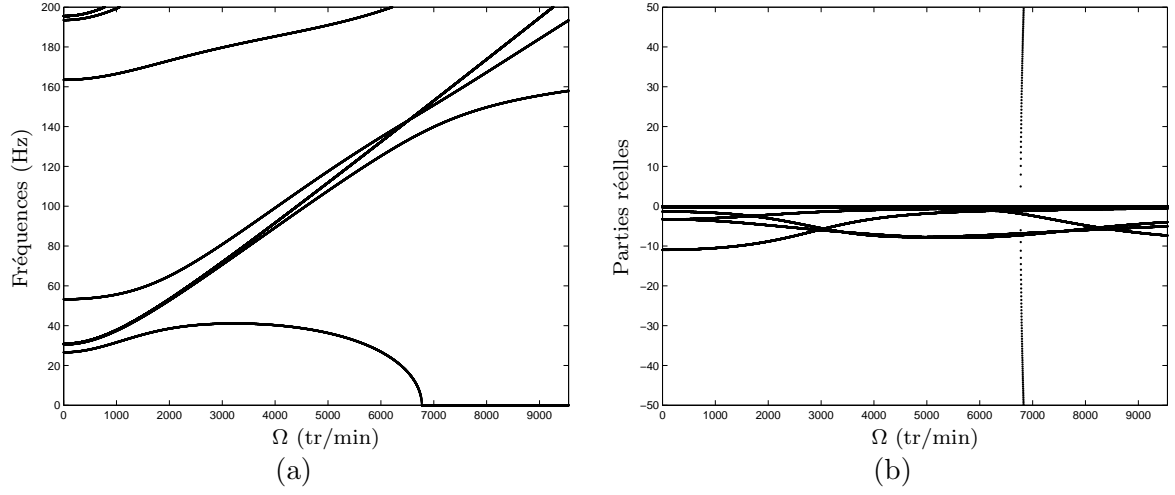


FIG. 6.14 – (a) Diagramme de Campbell (b) parties réelles des valeurs propres associées, pour un rotor à 6 aubes en contact sur une d’entre elles avec un stator rigide

### 6.2.2 Carter flexible

Dans cette partie, le stator n’est plus rigide mais flexible et inextensible. Le modèle alors utilisé est celui de l’anneau élastique du chapitre 5 pour lequel plusieurs modes sont considérés en même temps pour exprimer ses déplacements :

$$w(\phi, t) = \sum_{n=2}^{ktot} A_n(t) \cos(n\phi) + B_n(t) \sin(n\phi) \quad (6.20)$$

$$u_s(\phi, t) = \sum_{n=2}^{ktot} -A_n(t) n \sin(n\phi) + B_n(t) n \cos(n\phi) \quad (6.21)$$

Ce modèle est développé en utilisant une approche énergétique. Celle-ci comporte une énergie cinétique  $T_{stat}$ , une énergie interne de déformation élastique  $\nu_{stat}$  ainsi qu’une fonction de dissipation  $F_{d_{stat}}$  associée à son amortissement interne. Tous ces éléments sont détaillés en annexe D. Le comportement dynamique du carter flexible seul est alors décrit par l’équation matricielle suivante :

$$\mathbf{M}_{stat} \ddot{\mathbf{X}}_{stat} + \tilde{\mathbf{C}}_{stat} \dot{\mathbf{X}}_{stat} + \tilde{\mathbf{K}}_{stat} \mathbf{X}_{stat} = \mathbf{0} \quad (6.22)$$

où  $\mathbf{M}_{stat}$ ,  $\tilde{\mathbf{C}}_{stat}$  et  $\tilde{\mathbf{K}}_{stat}$  sont respectivement les matrices de masse, d’amortissement généralisée, tenant compte des effets gyroscopiques, et de raideur généralisée, incluant les effets d’assouplissement centrifuge du stator. Leurs expressions sont également détaillées dans l’annexe D.  $\mathbf{X}_{stat}$  définit le vecteur des degrés de liberté généralisés du stator et a pour expression :

$$\mathbf{X}_{stat} = \begin{bmatrix} A_2 & B_2 & \cdots & A_{ktot} & B_{ktot} \end{bmatrix}^T \quad (6.23)$$

Dans le cas d’un anneau circulaire de rayon  $R_{stat} = 1.5\text{m}$ , de section rectangulaire (2cm d’épaisseur et 1m de longueur) et dont les 6 premiers modes de flexion sont considérés, un

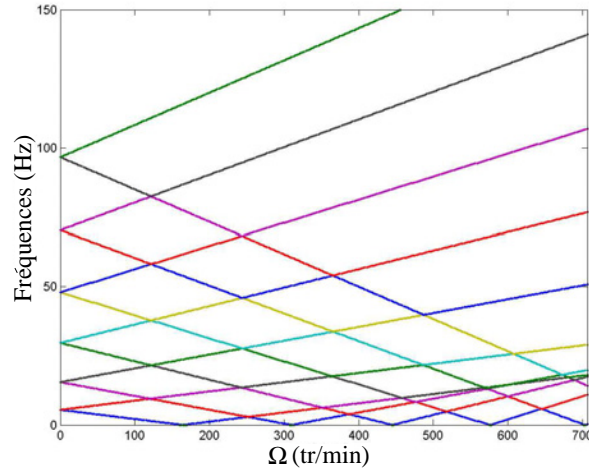


FIG. 6.15 – Diagramme de Campbell pour le stator flexible décrit dans le repère tournant

diagramme de Campbell résultant de la description du stator dans un repère tournant peut être tracé comme le montre la figure 6.15.

Comme précédemment, nous allons dans un premier temps étudier les positions d'équilibre statique que peut adopter le système puis, ses configurations dynamiques seront analysées.

### 6.2.2.1 Etude des positions d'équilibre statique

Dans cette partie, le contact est également supposé être initié par une force de balourd et les effets de la gravité sont toujours négligés. Le contact est traité par des multiplicateurs de Lagrange introduits comme précédemment (Cf. équation 6.14), en considérant les jeux entre les aubes et le carter flexible. Pour la  $j^{\text{ème}}$  aube, celui-ci peut s'exprimer par :

$$g_j = u(l, t) \cos \phi_j + v(l, t) \sin \phi_j + u_s(\phi = \phi_j, t) - \delta \quad (6.24)$$

L'évolution des configurations du système va être suivie par un algorithme de type quasi statique. Le rotor possédant désormais des degrés de liberté, une équation de couplage entre ces derniers et les degrés de liberté du rotor devra être considérée dès qu'un contact sera initié. Cette équation de couplage peut être formulée comme suit :

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{K}}_{rotor+} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{K}}_{stator+} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{X}_{rotor} \\ \lambda \\ \mathbf{X}_{stator} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_{balourd} \\ \delta \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (6.25)$$

où  $\tilde{\mathbf{K}}_{stator+}$  est constituée de la matrice  $\tilde{\mathbf{K}}_{stator}$  complétée par les premières colonne et ligne suivantes, dans le cas d'un contact sur l'aube  $j$ , avec  $m \in [2, k_{tot}]$  et  $k \in [2, k_{tot}]$  :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{K}}_{stator+}(2m-3+j, j) &= -m \sin(m\phi_j) \\ \tilde{\mathbf{K}}_{stator+}(2m-2+j, j) &= m \cos(m\phi_j) \end{aligned} \quad (6.26)$$

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{K}}_{stator+}(j, 2k - 3 + j) &= -k \sin(k\phi_j) \\ \tilde{\mathbf{K}}_{stator+}(j, 2k - 2 + j) &= k \cos(k\phi_j)\end{aligned}\quad (6.27)$$

Une rampe de la vitesse de rotation va être effectuée et les jeux entre les 6 aubes du rotor et le carter flexible vont être suivis. Les résultats sont représentés sur la figure 6.16. Pour aborder ce problème, plus complexe que le cas précédent, la vitesse à laquelle a lieu le premier contact a été placée volontairement en dessous de la vitesse critique du rotor et ainsi qu'en dessous de celle du stator. Sur la figure 6.16, qui représente les configurations d'équilibre statique adoptées par le système, on voit que le premier contact à lieu à 95 tr/min sur l'aube ①.

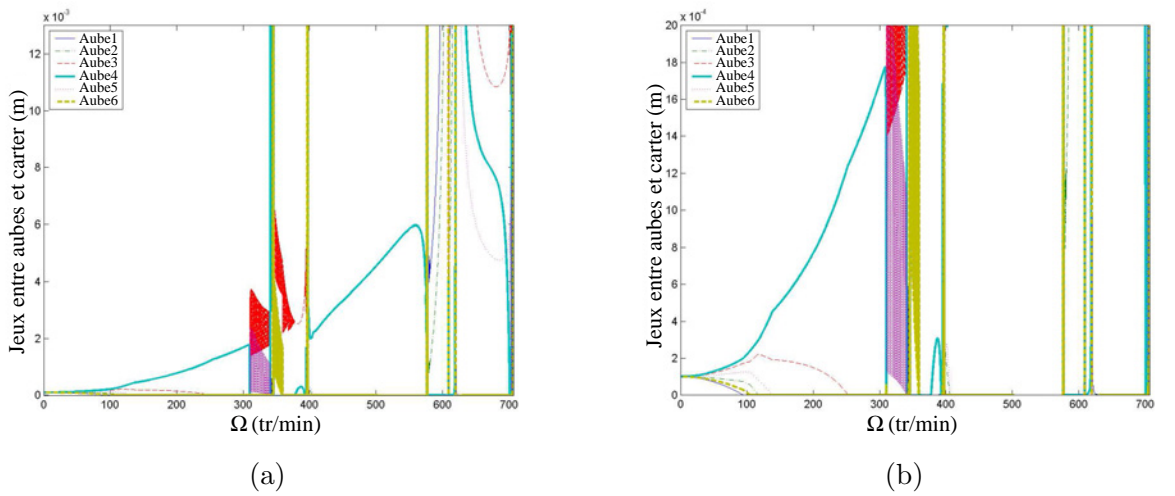


FIG. 6.16 – (a) Evolution des jeux entre les aubes et le stator flexible (b) zoom

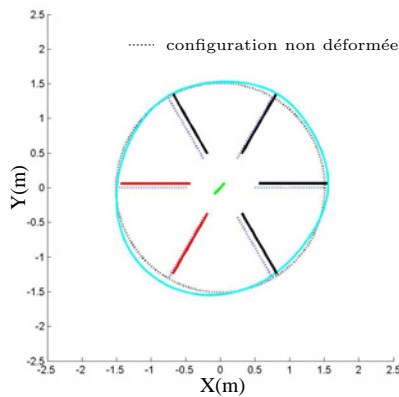


FIG. 6.17 – Position d'équilibre statique du système à 164 tr/min (déplacements amplifiés)

Lorsque la vitesse de rotation augmente d'avantage, les aubes ⑥, puis ②, puis ⑤ touchent le carter. La stabilité de ces configurations peut être déterminée comme dans le cas du contact



avec un carter rigide. Il se trouve que toutes les configurations obtenues jusqu'ici sont stables. Ainsi, à la première vitesse critique théorique du stator c'est-à-dire à 164 tr/min (conformément à la figure 6.15), les aubes ①, ⑥, ② et ⑤ sont en contact avec le carter élastique. Cette position d'équilibre est également stable et la déformée associée (dont les déplacements ont été amplifiés afin d'être observables) est représentée sur la figure 6.17. Contrairement à ce qui aurait pu être envisagé, aucun phénomène particulier n'est observé (sur la figure 6.16) au passage de cette vitesse critique. En fait, il faut bien avoir à l'esprit que le système rotor/stator, couplé par les aubes ①, ⑥, ② et ⑤, diffère des systèmes découplés. Ainsi, contrairement au carter, le système couplé par les quatre aubes en question, ne possède pas de vitesse critique à 164 tr/min, comme le montre son diagramme de Campbell représenté sur la figure 6.18.

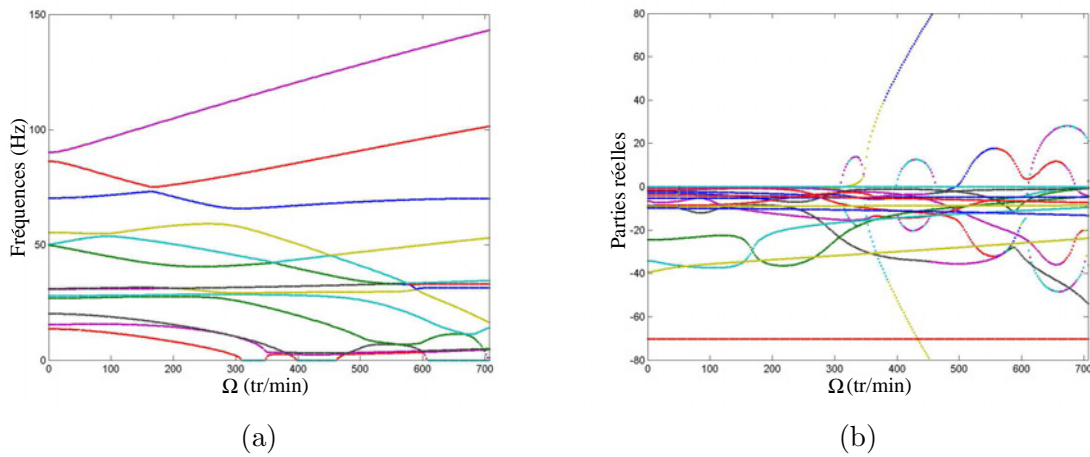


FIG. 6.18 – (a) Diagramme de Campbell (b) parties réelles associées, pour un stator flexible en contact avec le rotor sur les aubes 1, 2, 5 et 6

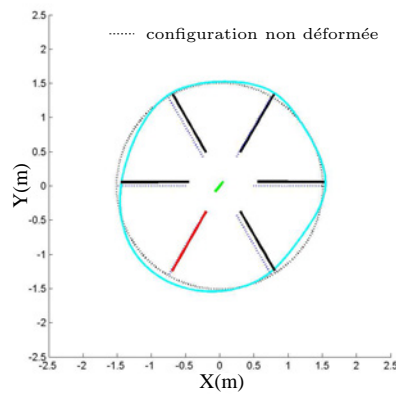


FIG. 6.19 – Position d'équilibre statique du système à 286 tr/min (déplacements amplifiés)

Lorsque la vitesse de rotation continue à augmenter, l'aube ③ vient également au contact du carter. A cette vitesse de rotation, toutes les aubes sont en contact avec le carter flexible exceptée l'aube ④. La déformée associée, à 286 tr/min est représentée sur la figure 6.19. La structure, ainsi couplée, conserve cette configuration statique, qui plus est stable, jusqu'à la seconde vitesse critique théorique du stator c'est-à-dire, à 310 tr/min. La déformée du système, à une vitesse légèrement inférieure, est représentée sur la figure 6.20. Il s'avère que cette configuration d'équilibre statique est la dernière configuration d'équilibre stable adoptée par la structure. En effet, Il se trouve que cette seconde vitesse critique du carter coïncide avec une vitesse critique pour le système rotor/stator couplés par ces cinq dernières aubes, comme le montre le diagramme de Campbell de cette structure illustré par la figure 6.21. La figure 6.20 atteste de plus qu'il s'agit du mode à trois diamètres nodaux du carter qui est excité.

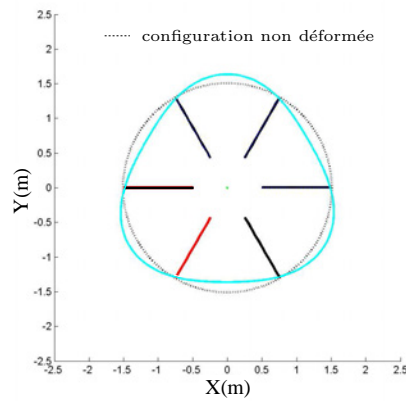


FIG. 6.20 – Position d'équilibre statique du système à 309,8 tr/min (déplacements amplifiés)

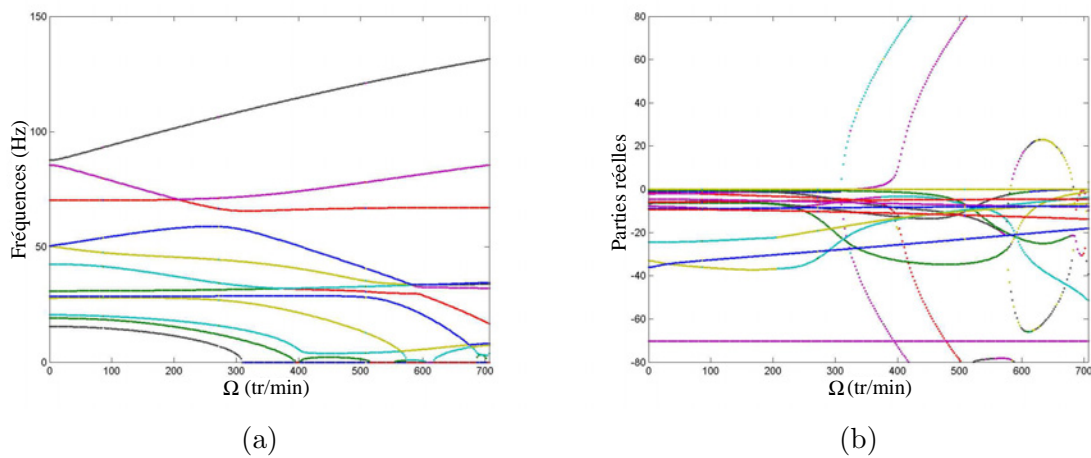


FIG. 6.21 – (a) Diagramme de Campbell (b) parties réelles associées, pour un stator flexible en contact avec le rotor sur les aubes 1, 2, 3, 5 et 6

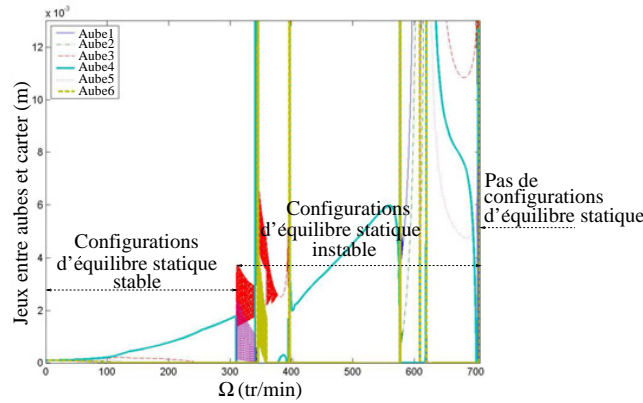


FIG. 6.22 – Synthèse des positions d'équilibre du système rotor/stator en contact

A partir de cette vitesse de rotation, l'algorithme quasi statique ne parvient plus à trouver de positions d'équilibre statique de façon continue comme le montre la figure 6.16. De plus, à partir de cette même vitesse, toutes les positions d'équilibre statique occupées par la suite par le système, sont désormais instables et, à partir de la vitesse critique associée au mode à six diamètres nodaux du stator, au voisinage de 705 tr/min, la structure ne possède plus du tout de positions d'équilibre statique.

Ainsi, trois zones de vitesses de rotation ont été mises en évidence et sont synthétisées en figure 6.22 : une plage de vitesses de rotation où le système possède et adopte des configurations d'équilibre statique stable, une seconde plage où il ne possède que des positions d'équilibre statique instable et enfin, une dernière où il n'existe plus de configurations d'équilibre statique. Mis à part dans la première plage de vitesses de rotation évoquée, la structure n'adoptera, a priori, pas de configurations statiques. Il apparaît donc nécessaire d'étudier son comportement dynamique afin de repérer d'éventuels comportements dynamiques.

### 6.2.2.2 Etude des configurations dynamiques

Le système étudié n'ayant pas de configurations d'équilibre statique stable à des vitesses de rotation supérieures à 310 tr/min, il est légitime de supposer l'existence de configurations d'équilibre dynamique stable au delà de cette vitesse. Dans un premier temps, le contact sera supposé être initié par la force de balourd. Le comportement dynamique du système qui en résulte sera étudié, à des vitesses de rotations supérieures à 310 tr/min et allant jusqu'à la vitesse critique du mode de carter suivant. Ensuite, le contact entre le rotor et le stator sera simulé, suite à un choc, à des vitesses de rotation supérieures.

La stratégie adoptée consiste, comme au chapitre 5, en une succession d'étapes de prédiction puis de correction. Le jeu entre l'aube  $j$ , de position angulaire initiale  $\phi_j$ , et le point du carter en vis-à-vis, situé à la position angulaire  $\theta_j$  peut s'exprimer par :

$$g_j = \sqrt{(R + u(l, t)\cos\phi_j + v(l, t)\sin\phi_j)^2 + (\eta_j(L, t)\cos\beta - u(l, t)\sin\phi_j + v(l, t)\cos\phi_j)^2} - \left[ R_{stat} - \frac{h}{2} - u_s(\theta_j, t) \right] \quad (6.28)$$

où  $R$  est la distance entre l'extrémité de l'aube et le centre de l'arbre et  $h$ , l'épaisseur du carter. Ce jeu peut se mettre sous la même forme que l'équation 5.48 avec :

$$\mathbf{C}_{\mathbf{N}k+1,p} = \mathbf{C}_{\mathbf{N}\mathbf{T}k+1,p} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_1 W_1(l) & \alpha_2 W_1(l) & \cdots & \alpha_1 W_{m_{tot}}(l) & \alpha_2 W_{m_{tot}}(l) \\ \alpha_3 Y_{1_j}(L) & \cdots & \alpha_3 Y_{N_{tot_j}}(L) & -2\sin 2\theta_j & 2\cos 2\theta_j & \cdots & -k_{tot}\sin k_{tot}\theta_j & k_{tot}\cos k_{tot}\theta_j \end{bmatrix}^T \quad (6.29)$$

avec

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{X_p \cos\phi_j - Y_p \sin\phi_j}{\sqrt{X_p^2 + Y_p^2}} \\ \alpha_2 &= \frac{X_p \sin\phi_j + Y_p \cos\phi_j}{\sqrt{X_p^2 + Y_p^2}} \\ \alpha_3 &= \frac{Y_p \cos\beta}{\sqrt{X_p^2 + Y_p^2}} \end{aligned} \quad (6.30)$$

où

$$\begin{aligned} X_p &= R + u_p(l, t)\cos\phi_j + v_p(l, t)\sin\phi_j \\ Y_p &= \eta_j^p(L, t)\cos\beta - u_p(l, t)\sin\phi_j + v_p(l, t)\cos\phi_j \end{aligned} \quad (6.31)$$

Dans ces expressions, l'indice  $p$  indique toujours que les grandeurs sont calculées à partir de l'étape de prédiction. La détermination des degrés de liberté corrigés ainsi que des forces de contact se fait selon les équations 5.61 et 5.60 du chapitre 5.

Le comportement dynamique du système a ainsi été étudié à différentes vitesses de rotation. Avant  $\Omega = 310$  tr/min, les intégrations temporelles réalisées ont confirmé que le système adopte bien des configurations d'équilibre statique. Par contre, à partir de cette vitesse, toutes les intégrations directes menées montrent des amplitudes de vibrations qui croissent brutalement dans le temps, comme en atteste la figure 6.23 représentant l'évolution des jeux entre les six aubes du rotor et le carter flexible au cours du temps et à une vitesse de  $\Omega = 382$  tr/min. Ce phénomène peut être mis directement en relation avec les études de stabilité effectuées au chapitre 5 sur le modèle d'aubes glissant sans frottement sur un anneau élastique.

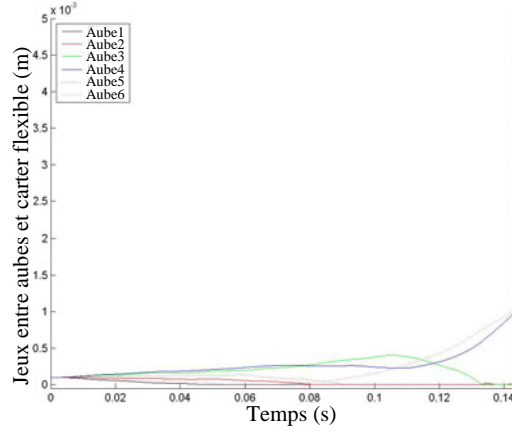


FIG. 6.23 – Evolution des jeux entre les six aubes du rotor et le carter, en fonction du temps et à  $\Omega = 382$  tr/min

### Etude de la dynamique du système pour un carter linéaire

Comme nous l'avons déjà précisé, la dernière configuration d'équilibre statique stable adoptée par le système, obtenue par l'algorithme quasi statique, illustrée par la figure 6.20, consiste en cinq contacts, entre le carter flexible et les aubes ①, ②, ③, ⑤ et ⑥ du rotor. Il semble, de plus, que ce soit le mode à trois diamètres nodaux du stator qui soit principalement excité. Afin d'expliquer les divergences des intégrations temporelles observées, une étude de stabilité va être réalisée grâce au modèle simple d'interaction rotor/stator développé au chapitre 5, dans le cas de cinq aubes disposées comme les aubes ①, ②, ③, ⑤ et ⑥, ayant des paramètres modaux proches de ceux du modèle de rotor flexible aubagé, glissant sur le mode à trois diamètres nodaux de l'anneau élastique.

Une étape préliminaire consiste donc en la détermination des paramètres modaux du rotor à six aubes jusqu'ici utilisé. Dans un souci de simplicité, ceci sera fait à  $\Omega = 0$  tr/min. Si le rotor est soumis à une force constante en intensité et en direction, sa masse et sa raideur modales associées à son premier mode de flexion d'arbre peuvent s'exprimer comme suit :  $m_1 = \tilde{\mathbf{X}}_1^T \mathbf{M}_{rotor} \tilde{\mathbf{X}}_1$  et  $k_1 = \tilde{\mathbf{X}}_1^T \mathbf{K}_{rotor} \tilde{\mathbf{X}}_1$ , où  $\tilde{\mathbf{X}}_1$  est son premier vecteur propre modal normalisé de telle sorte que le déplacement du rotor au point et dans la direction d'application de la force égale l'unité. Les paramètres modaux du rotor ainsi estimés valent :  $m_1 = 4,45.10^4 kg$  et  $k_1 = 6,23.10^{12} N.m^{-1}$ .

Les figures 6.24 (a) et (b) représentent l'étude de stabilité du mode à trois diamètres nodaux de l'anneau élastique excité par cinq aubes disposées comme indiqué précédemment. Les figures 6.24 (c) et (d) représentent quant à elles l'étude de stabilité du rotor flexible aubagé en contact avec le carter flexible sur cinq aubes. Il apparaît tout d'abord que, par rapport au modèle phénoménologique développé au chapitre 5, la présence de plusieurs modes pour décrire le comportement du carter est à l'origine du plus grand nombre d'instabilités (Cf. figures 6.24 (c) et (d)) que dans le cas de l'approximation par un seul mode (Cf. figures 6.24 (a)

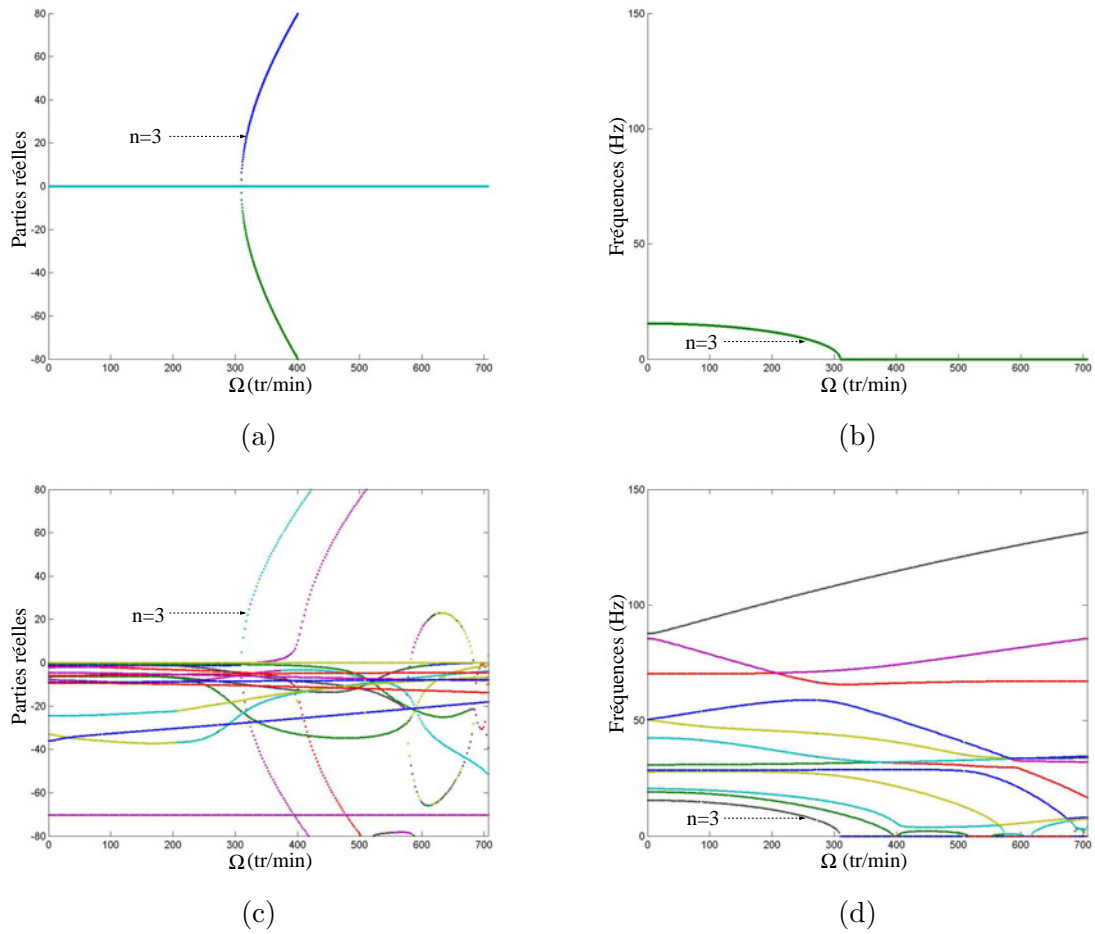


FIG. 6.24 – Comparaison des études de stabilité provenant du modèle phénoménologique d’anneau élastique excité par cinq aubes tournantes, (a) et (b) et celle provenant du modèle de rotor flexible aubagé en contact avec le carter sur cinq aubes, (c) et (d)

et (b)). Cependant, comme il l’avait été précisé au chapitre 5, cette approximation par un seul mode est quand même tout à fait représentative de l’instabilité du mode considéré du système rotor/stator couplés, comme en atteste l’adéquation des courbes de la figure 6.24 pour le mode  $n = 3$  du carter.

Ainsi, la divergence des amplitudes de vibrations du système décelée par les intégrations temporelles réalisées pour une vitesse de rotation supérieure à 310 tr/min, provient de l’instabilité détaillée au chapitre 5 qui résulte du déplacement d’une charge (les aubes) sur une structure élastique (le carter). La vitesse à laquelle se produit ce phénomène correspond d’ailleurs parfaitement à la vitesse notée  $\Omega_c$  dans le chapitre 5 et est associée au mode à trois diamètres nodaux du carter. De plus, comme nous l’avons également précisé dans ce chapitre, avec cette configuration de rotor possédant six aubes espacées angulairement de  $60^\circ$  les unes des autres, il n’existe pas de configuration de contacts pour laquelle la zone de divergence du système disparaît.

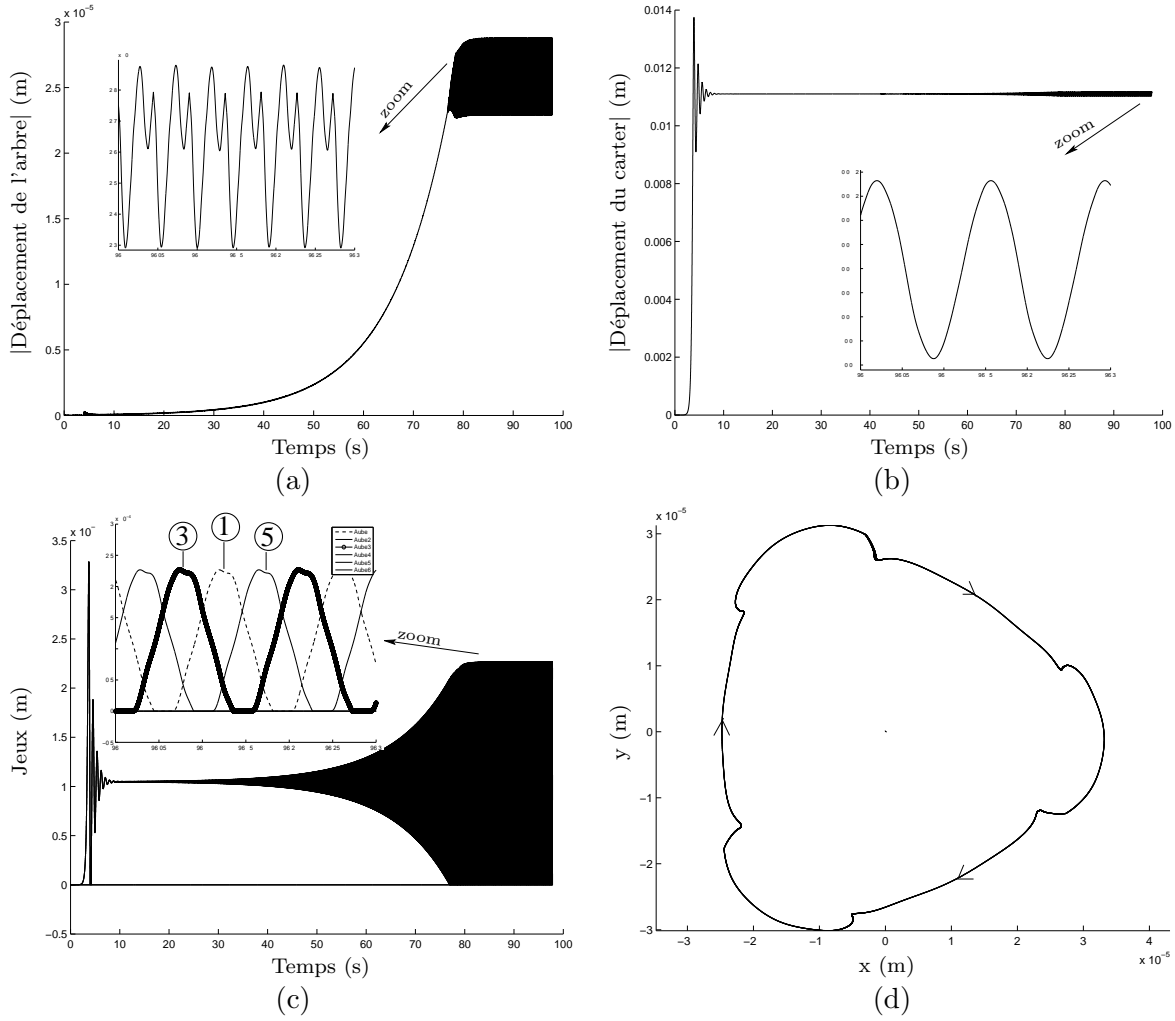


FIG. 6.25 – Déplacements (a) de l'arbre, (b) du carter non linéaire avec  $k_{NL} = 1.10^5 \text{ N.m}^{-1}$ , (c) évolution des jeux entre les aubes et le carter, (d) orbite de l'arbre tournant à  $\Omega = 310 \text{ tr/min}$

### Etude de la dynamique du système pour un carter non linéaire

Afin d'étudier le système de façon plus réaliste, nous allons considérer un carter non linéaire de façon à prendre en compte les non linéarités naturelles intervenant lors des grands débattements de la structure. Ce modèle de carter non linéaire correspond à celui considéré au chapitre 5.

Il se trouve que ce système, où le carter est non linéaire, adopte les mêmes configurations d'équilibre statique stable que dans le cas où le carter est linéaire pour des vitesses de rotations inférieures à  $\Omega_c$ . Par contre, à  $\Omega_c$ , c'est-à-dire à  $\Omega = 310 \text{ tr/min}$ , le système possédant des raideurs non linéaires  $k_{NL} = 1.10^5 \text{ N.m}^{-1}$  adopte une configuration dynamique comme en atteste la figure 6.25. Sur les figures 6.25 (a) et 6.25 (b), il apparaît que le système atteint en effet un cycle limite. Celui-ci est caractérisé par une alternance des contacts sur les aubes ①,

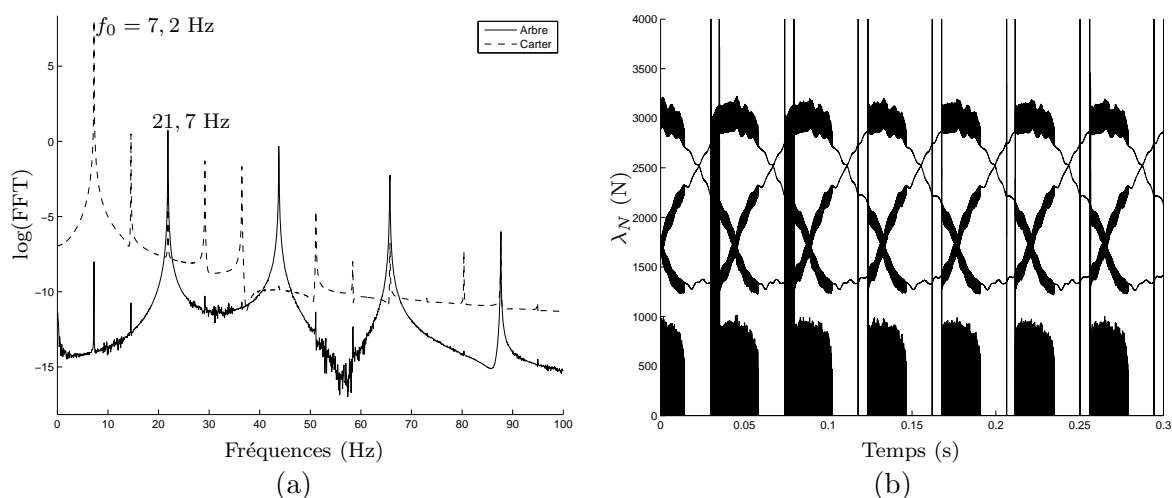


FIG. 6.26 – (a) Spectre fréquentiel des déplacements de l'arbre et du carter, (b) évolution des forces de contact dans le cas d'un carter non linéaire avec  $k_{NL} = 1.10^5 \text{ N.m}^{-1}$  et un arbre tournant à  $\Omega = 310 \text{ tr/min}$

③ et ⑤ (Cf. figure 6.25 (c)). L'arbre décrit alors l'orbite représentée sur la figure 6.25 (d) dans le sens rétrograde. On peut noter que cette orbite présente trois lobes extérieurs qui, à des vitesses de rotation plus élevées, deviendront des boucles externes, comme nous le verrons par la suite, et sont caractéristiques d'une réponse multi-harmonique [23]. Ceci peut être confirmé en observant le spectre des déplacements de l'arbre et de l'anneau, sur la figure 6.26 (a). Sur cette figure, on voit que le fondamental est à  $f_0 = 7,2 \text{ Hz}$  et que ce dernier est prédominant dans la réponse du carter alors que pour l'arbre, c'est l'harmonique d'ordre 3 qui est prédominant. Une façon de valider le cycle limite obtenu, peut être de comparer la dynamique du système fournie par des intégrations directes réalisées avec des pas de temps différents. Le résultat est représenté sur les figures 6.27 (a), (b) et (c). On peut ainsi constater que l'algorithme a bien convergé puisque les différences entre les résultats sont minimales alors que les pas d'intégration ont un rapport 2 entre eux. De plus, la figure 6.27 (c) montre que les fréquences des signaux obtenus par ces deux intégrations de pas différents sont également très proches.

Il est important de remarquer que le système étudié présente une fréquence de réponse qui n'est pas déterminée a priori. En effet, la fréquence du mode à trois diamètres nodaux de l'anneau (qui correspond à la vitesse critique  $\Omega_c$ ) est  $f_{stat} = 15,2 \text{ Hz}$ , celle de l'arbre,  $f_{arbre} = 26,7 \text{ Hz}$  alors que la fréquence de rotation est  $f_\Omega = 5,17 \text{ Hz}$ . La méthode 2SHBM aurait alors toute son utilité pour déterminer la dynamique d'un tel système. Cependant, elle consiste en une minimisation sous contraintes et ne permet pas, à l'heure actuelle, d'obtenir des résultats satisfaisants lorsque le nombre de degrés de liberté est supérieur à 20. En ce qui concerne la méthode de shooting, elle converge très difficilement en raison de l'évolution des forces de contact, représentée sur la figure 6.26 (b) qui, comme dans le cas du frottement dans les modèles phénoménologiques du chapitre 5, rend l'estimation du gradient des forces très délicate. Par contre, puisque la fréquence de réponse du système a pu être déterminée et validée a posteriori, comme le montrent les figures 6.26 (a) et 6.27 (c), il est possible d'utiliser une



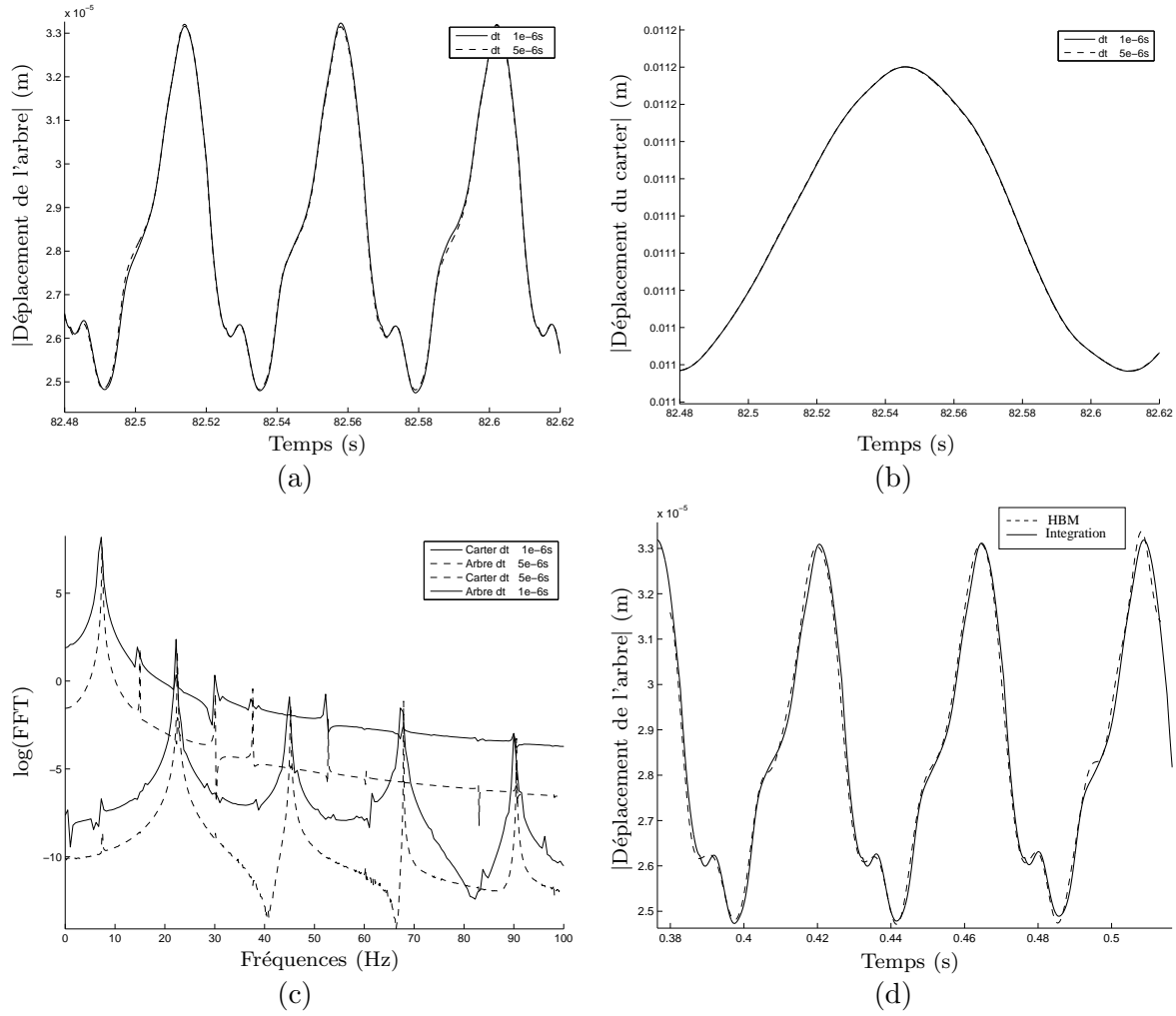


FIG. 6.27 – Déplacements (a) de l'arbre tournant à  $\Omega = 310$  tr/min, (b) du carter non lineaire avec  $k_{NL} = 1.10^5 \text{ N.m}^{-1}$ , (c) spectres associés, obtenus par intégrations temporelles directes avec deux pas de temps différents, (d) comparaison des déplacements de l'arbre obtenus par intégration temporelle et par HBM

méthode de balance harmonique. Le résultat de celle-ci dans le cas d'une troncature à l'ordre 20 est représenté sur la figure 6.27 (d) et montre une très bonne adéquation des résultats, validant ainsi une fois de plus le cycle limite obtenu.

Le comportement dynamique du système non linéaire, avec cette même valeur de raideur  $k_{NL} = 1.10^5 \text{ N.m}^{-1}$ , va être étudié à des vitesses de rotation plus élevées. Il s'avère que la fréquence de réponse du système augmente avec la vitesse de rotation. Ainsi, à  $\Omega = 311$  tr/min, la fréquence de réponse du système est à 8,3 Hz et à  $\Omega = 315$  tr/min, elle est à 10,5 Hz. Les orbites de l'arbre associées à ces deux régimes sont représentées sur la figure 6.28. Comme le montrent ces figures, l'arbre est animé d'un mouvement rétrograde formant des boucles externes d'amplitude croissante avec la vitesse de rotation. De plus, le contenu fréquentiel de la réponse du système est enrichi lorsque  $\Omega$  augmente, comme en atteste le spectre de la

réponse du système, en rotation à  $\Omega = 319$  tr/min, représenté sur la figure 6.29. Sur cette figure, la réponse de l'arbre apparaît bien plus dense, en fréquence, qu'elle ne l'était à  $\Omega = 310$  tr/min (Cf. figure 6.26 (a)). Lorsque la vitesse de rotation augmente d'avantage, ce phénomène s'amplifie et la valeur de la raideur cubique choisie devient inadaptée à la modélisation des non linéarités naturelles liées aux grands déplacements du carter en ce sens où le système atteint des amplitudes de vibrations non réalistes. Il faut alors, comme dans le cas des modèles phénoménologiques développés au chapitre 5, ajuster la valeur de ces raideurs afin de se rapprocher d'un comportement envisageable.

### Influence de la valeur des raideurs non linéaires du carter sur la dynamique du système

Nous allons ainsi considérer deux valeurs pour les raideurs cubiques des ressorts liés au stator :  $k_{NL} = 6.10^5 \text{ N.m}^{-1}$  et  $k_{NL} = 1.10^{11} \text{ N.m}^{-1}$ .

Le comportement du système, comportant des raideurs  $k_{NL} = 6.10^5 \text{ N.m}^{-1}$  et tournant à  $\Omega = 363$  tr/min est représenté sur la figure 6.30. Il apparaît sur ces figures, un comportement dynamique (Cf. figure 6.30 (a) et (b)) au cours duquel les contacts ne se font plus que sur trois aubes, ① ③ et ⑤ (les décollements étant de l'ordre de  $10\mu\text{m}$ ), les trois autres étant décollées du carter en permanence compte tenu des amplitudes de ses déformations (Cf. figure 6.30 (c)). De plus, on peut voir que ce régime possède des fréquences bien plus élevées qu'aux faibles vitesses déjà étudiées, comme en atteste le spectre des réponses de l'arbre et du carter représenté en figure 6.31. L'orbite de l'arbre, à cette vitesse de rotation, est représentée sur la figure 6.30 (d). Il faut noter que, bien qu'elle soit toujours rétrograde, elle ne possède pas de boucles externes, comme dans les cas précédents. Elle consiste en une superposition de courbes elliptiques.

Dans le cas où les raideurs non linéaires valent  $k_{NL} = 1.10^{11} \text{ N.m}^{-1}$ , le système adopte, à cette même vitesse ( $\Omega = 363$  tr/min), une configuration statique, comme en atteste la figure 6.32. Sur celle-ci, on peut constater que la configuration du système consiste en des contacts permanents toujours sur les aubes ①, ③ et ⑤ (Cf. figure 6.32 (a)) et que le mode à trois diamètres nodaux du carter répond de façon prédominante (Cf. figure 6.32 (b)). Ce comportement, c'est-à-dire l'adoption d'une configuration statique du système pour des non linéarités limitant les grands déplacements du carter est tout à fait cohérent avec l'étude des modèles phénoménologiques faite au chapitre 5. En effet, nous avons vu que dans la plage de divergence du carter linéaire, une configuration statique était une solution du système non linéaire. Or conformément à l'étude de stabilité faite avec les paramètres modaux du rotor flexible aubagé (Cf. figure 6.24), cette plage de divergence est très étendue et inclue la vitesse de  $\Omega = 363$  tr/min.

Pour pouvoir étudier le comportement du système à des vitesses encore plus élevées, nous allons conserver cette dernière valeur de raideurs non linéaires. Nous allons chercher à déterminer le comportement de ce système avant, au voisinage et après la vitesse critique du carter qui correspond au mode à quatre diamètres. Il se trouve que dans ces trois cas, avec cette valeur de raideur cubique, le système conserve une configuration statique avec des contacts permanents toujours sur les trois aubes ①, ③ et ⑤. La déformée associée est donc très semblable à celle représentée sur la figure 6.32 (b). Ce résultat semble une fois de plus très cohérent avec ceux du chapitre 5.

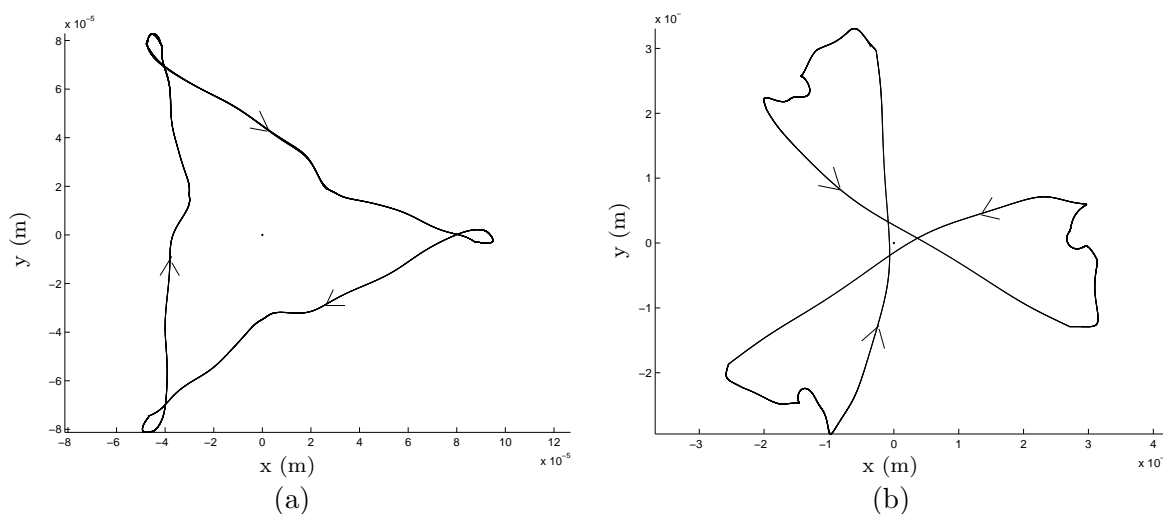


FIG. 6.28 – Orbite de l'arbre animé d'une vitesse de rotation de (a)  $\Omega = 311$  tr/min, (b)  $\Omega = 315$  tr/min

### Dynamique du système suite à un choc sur le carter

Jusqu'ici, le contact était initié par une force de balourd. Cependant, en condition réelles de fonctionnement, le balourd est réduit le plus possible afin de ne pas engendrer de déplacements du rotor supérieurs au jeu entre les aubes et le carter. En conséquence, les contacts sont généralement initiés par des incidents. Nous allons donc, pour terminer cette étude, analyser le cas des contacts entre le rotor flexible aubagé et le carter élastique faisant suite à un choc sur ce dernier et en l'absence de force de balourd. Dans un premier temps, nous allons rester dans la même gamme de vitesses de rotation que précédemment afin de constater d'éventuels changements de comportements. Puis, des simulations de prises de contacts seront réalisées à des vitesses supérieures.

Nous allons donc simuler un choc sur le carter à une vitesse de rotation du rotor telle que **les fréquences propres du rotor et du stator sont éloignées**. Ainsi, à  $\Omega = 382$  tr/min, si le carter non linéaire, possédant de fortes raideurs cubiques, subit un choc d'une durée de  $100\mu s$  à la position angulaire  $\theta = 0^\circ$  dans le repère tournant, on montre que le système adopte une configuration statique où le mode à trois diamètres nodaux de ce dernier répond de façon prédominante et où trois aubes, ②, ④ et ⑥, sont en contact permanent avec le stator, comme l'illustre la figure 6.33. On peut remarquer que, contrairement aux autres configurations statiques observées du système, les aubes en contact ont changé. Ceci peut s'expliquer par la position du premier contact. En effet, lorsque l'interaction était due au balourd, celui-ci étant placé à  $45^\circ$  dans le repère tournant, le contact se produisait sur l'aube ①. Il s'en suivait une déformation du carter où son mode à trois diamètres nodaux était prépondérant et donc, les deux autres aubes ③ et ⑤, compatibles avec cette déformée, venaient également au contact. Dans le cas présent, la position du choc sur le carter est à l'origine du premier contact sur

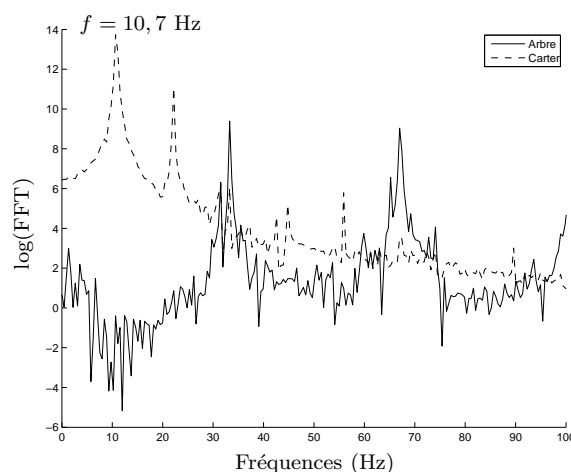


FIG. 6.29 – Spectre de la réponse du système à une vitesse de rotation  $\Omega = 319$  tr/min

l'aube ⑥ et, pour la même raison que précédemment (déformée du carter selon son mode à trois diamètres nodaux), les aubes ② et ④ viennent ensuite au contact.

Ce comportement, c'est-à-dire l'adoption d'une configuration statique, devrait se produire à d'autres vitesses de rotation plus élevées tant que la dynamique des aubes n'intervient pas. Par exemple, à  $\Omega = 860$  tr/min, après un choc sur le carter, des contacts se produisent avec le rotor et le système tend vers une configuration statique comme le montre la figure 6.34, où toutes les aubes du rotor sont en contact avec le carter (Cf. figure 6.34 (c)). Ceci peut également s'expliquer par la déformée du carter qui, étant excité après la vitesse critique de son mode à six diamètres nodaux, possède six lobes et « englobe » ainsi le rotor (Cf. figure 6.34 (d)).

Nous allons maintenant nous intéresser au cas où **les fréquences propres du rotor et du stator sont proches**. Dans ce contexte, nous nous placerons à des vitesses de rotation élevées qui assurent que les fréquences des différentes structures peuvent interagir, comme par exemple dans le cas des modèles phénoménologiques entre la flexion des aubes et l'anneau (Cf. chapitre 5). Afin de rendre ces considérations fréquentielles plus réalistes, nous allons coupler les aubes entre elles par des raideurs. De ce fait, le disque aubagé pourra avoir des modes à diamètres dont les fréquences sont susceptibles d'interagir avec le carter. La superposition des diagrammes de Campbell du rotor flexible aubagé ayant des aubes couplées et du carter élastique linéaire est représentée sur la figure 6.35. Les raideurs des paliers du système associé ont été rigidifiées afin de faire intervenir de façon prédominante les modes de disque du rotor. Les déformées des trois premiers modes de ce dernier, présents sur cette figure, sont représentées sur la figure 6.36. Le premier consiste en un mode d'ensemble des aubes (Cf. figure 6.36 (a)), le deuxième correspond à un mode à un diamètre (Cf. figure 6.36 (b)) et le troisième, à un mode à deux diamètres (Cf. figure 6.36 (c)). Sur le diagramme de Campbell représenté sur la figure 6.35, on peut voir qu'à partir d'environ  $\Omega = 1100$  tr/min, les fréquences du disque aubagé ne sont plus très éloignées de celles du carter. Ce dernier ne sera donc plus le seul à intervenir dans le comportement dynamique du système en cas de contact, à des vitesses de

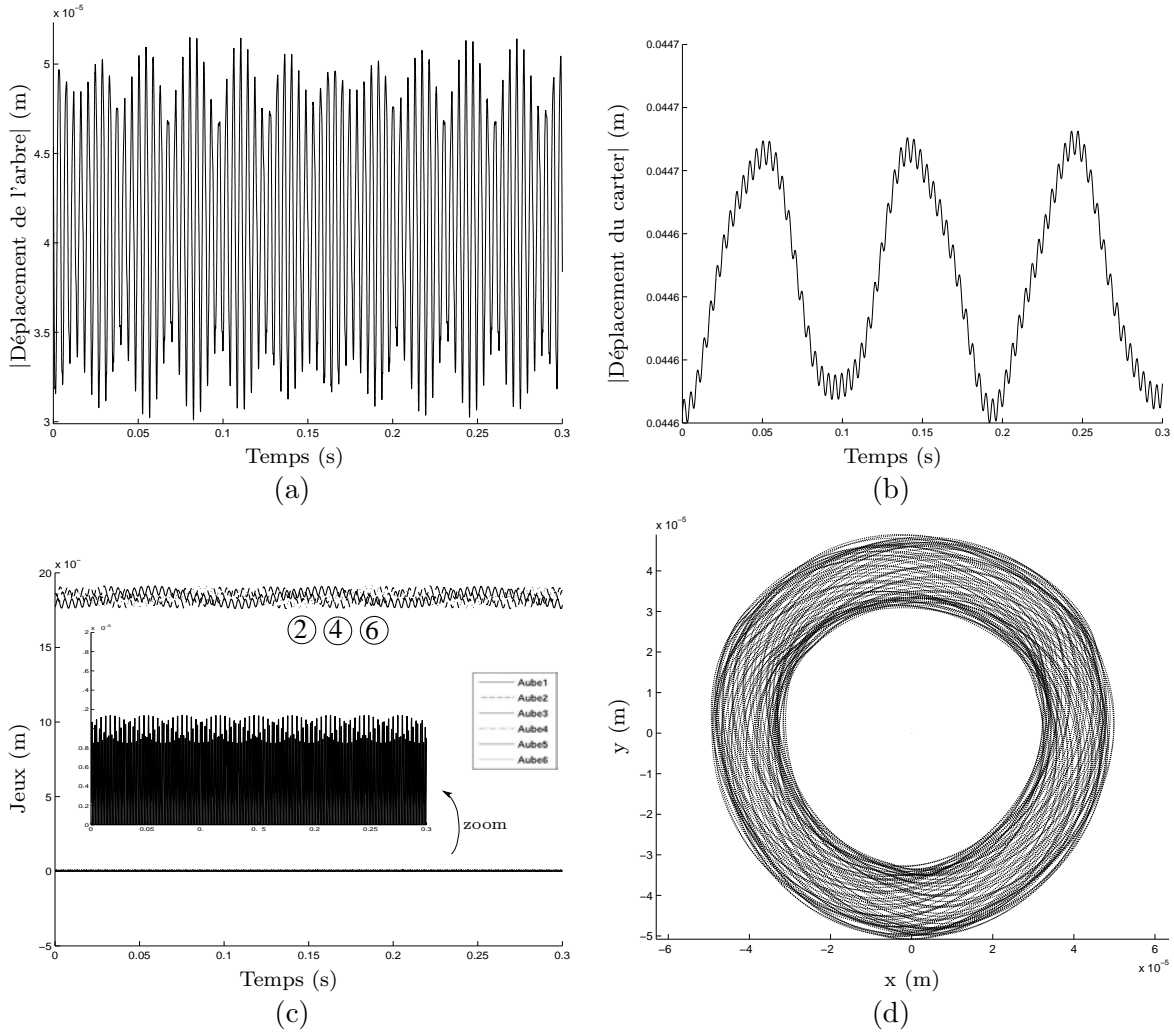


FIG. 6.30 – Déplacements (a) de l'arbre, (b) du carter non linéaire avec  $k_{NL} = 6.10^5 \text{ N.m}^{-1}$ , (c) évolution des jeux entre les aubes et le carter, (d) orbite de l'arbre tournant à  $\Omega = 363 \text{ tr/min}$

rotation supérieures. Nous pouvons également repérer sur ce graphe les vitesses de rotation où les fréquences de disque aubagé et celles du carter sont égales et, effectuer des simulations de prises de contacts à ces vitesses. Des croisements entre les modes directs (indiqués par la lettre D sur la figure 6.35, la lettre R repérant un mode rétrograde) à deux et trois diamètres nodaux du carter et les deux modes de disque aubagé représentés sur la figure 6.36, sont indiqués par des cercles. Le mode direct à deux diamètres nodaux du carter intersecte donc le premier mode du disque à  $\Omega = 1528 \text{ tr/min}$  et celui à trois diamètres nodaux croise le second mode du disque à  $\Omega = 1308 \text{ tr/min}$ . Il est important de préciser que le couplage inter-aubes ainsi introduit n'influe pas sur les études de stabilité réalisées au chapitre 5.

Il se trouve qu'à  $\Omega = 1528 \text{ tr/min}$ , suite à un choc sur le carter, il se produit des contacts entre le rotor et le stator qui perdurent dans le temps (alors qu'en l'absence de choc il n'y a pas contact) et aboutissent à un régime périodique, comme le montre la figure 6.37, où toutes les

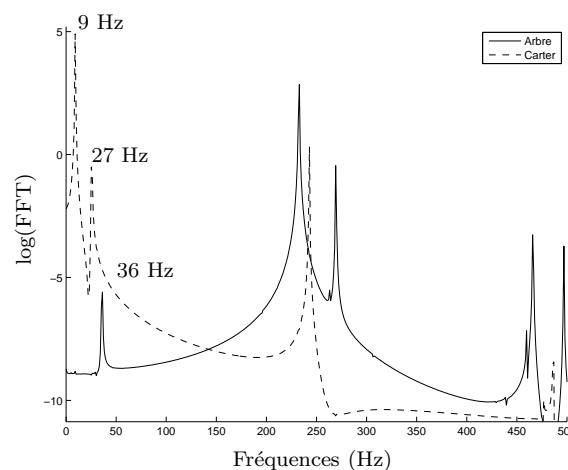


FIG. 6.31 – Spectre de la réponse du système à une vitesse de rotation  $\Omega = 363$  tr/min et des raideurs cubiques  $k_{NL} = 6.10^5$   $N.m^{-1}$

aubes se décolle successivement du carter puis reprennent le contact les unes après les autres (Cf. figure 6.37 (c)). Une déformée du système ainsi que l'orbite de l'arbre sont représentées sur les figures 6.37 (e) et (f). On voit ainsi que le stator possède autant de lobes que d'aubes et que l'arbre effectue une succession d'orbites elliptiques rétrogrades. Les fréquences de la réponse du système, représentées sur la figure 6.37 (d), n'entretiennent pas de relation triviale avec les fréquences des différentes structures (45,5 Hz pour le disque et le stator) ni avec la fréquence de rotation ( $f_{\Omega} = 25,5$  Hz à  $\Omega = 1528$  tr/min). L'interaction observée entre le disque et le carter est vraisemblablement due à une résonance interne (mettant en jeu le carter, le disque et l'excitation) de type non linéaire. On peut préciser que sur la figure 6.37 (d), seul le spectre fréquentiel associé aux déplacements d'une seule aube a été représenté puisque toutes les aubes ont la même dynamique, comme en témoigne la figure 6.37 (a). A  $\Omega = 1308$  tr/min, le comportement dynamique du système est plus compliqué qu'à  $\Omega = 1528$  tr/min comme le montre la figure 6.38. Ce régime possède néanmoins une certaine périodicité et sur la figure 6.38 (d), on voit que le mode de disque sollicité est bien un mode de disque à un diamètre nodal, ce qui n'apparaissait pas sur la déformée du système à  $\Omega = 1528$  tr/min (Cf. figure 6.37 (e)). La complexité de ce régime dynamique par rapport à celui observé à  $\Omega = 1528$  tr/min peut être liée au grand nombre de modes du système proches les uns des autres à cette vitesse de rotation, comme en témoigne la figure 6.35 dans le cercle associé à la vitesse  $\Omega = 1308$  tr/min.

Ainsi, cette première partie de l'étude du contact entre un rotor flexible aubagé et un carter flexible, en l'absence de frottement montre que tant que les modes de disque sont éloignés des modes de carter, c'est-à-dire, dans une plage de vitesses de rotation assez faibles, le système adopte une configuration statique à contacts permanents entre certaines aubes du rotor et le carter. Les aubes particulières qui restent alors en contact permanent avec le carter, ainsi que leur nombre, dépendent de la déformée du carter ainsi que de l'origine du premier contact et donc par extension, de la position du premier contact. Bien sûr, ces configurations statiques ne peuvent être obtenues qu'en considérant les non linéarités liées naturellement aux grands

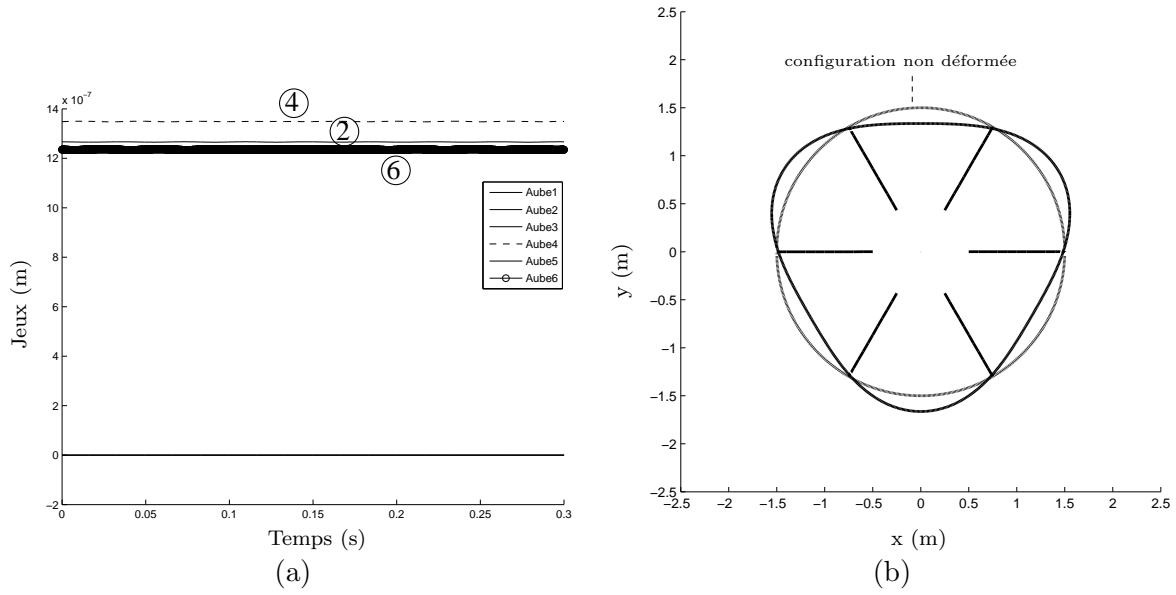


FIG. 6.32 – (a) Evolution des jeux entre les aubes du rotor tournant à  $\Omega = 363$  tr/min et le carter non linéaire avec  $k_{NL} = 1.10^{11} \text{ N.m}^{-1}$ , (b) déformée associée (déplacements amplifiés)

déplacements du carter qui, après les vitesses critiques de ses modes, diverge en cas de contact avec le rotor. Si maintenant des contacts se produisent à des vitesses plus élevées telles que les fréquences des parties tournantes et du stator sont proches, alors le système adopte des configurations dynamiques dont le spectre fréquentiel peut être plus ou moins dense en fonction du nombre de modes voisins, à la vitesse de rotation considérée.

Il convient enfin d'étudier l'influence du frottement sur la dynamique d'un tel système en cas de contacts.

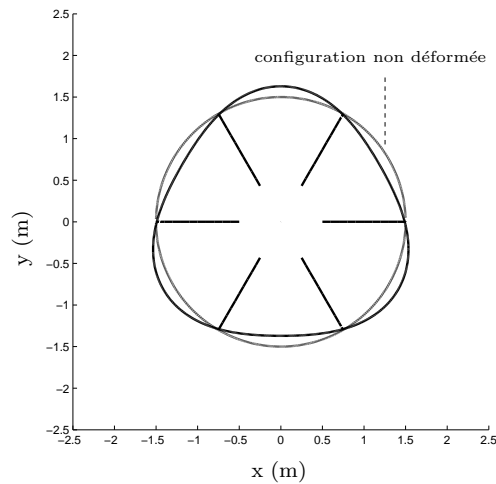


FIG. 6.33 – Déformée du système composé d'un carter non linéaire avec  $k_{NL} = 1.10^{11} \text{ N.m}^{-1}$  en contact avec un rotor flexible aubagé tournant à  $\Omega = 382$  tr/min (déplacements amplifiés)

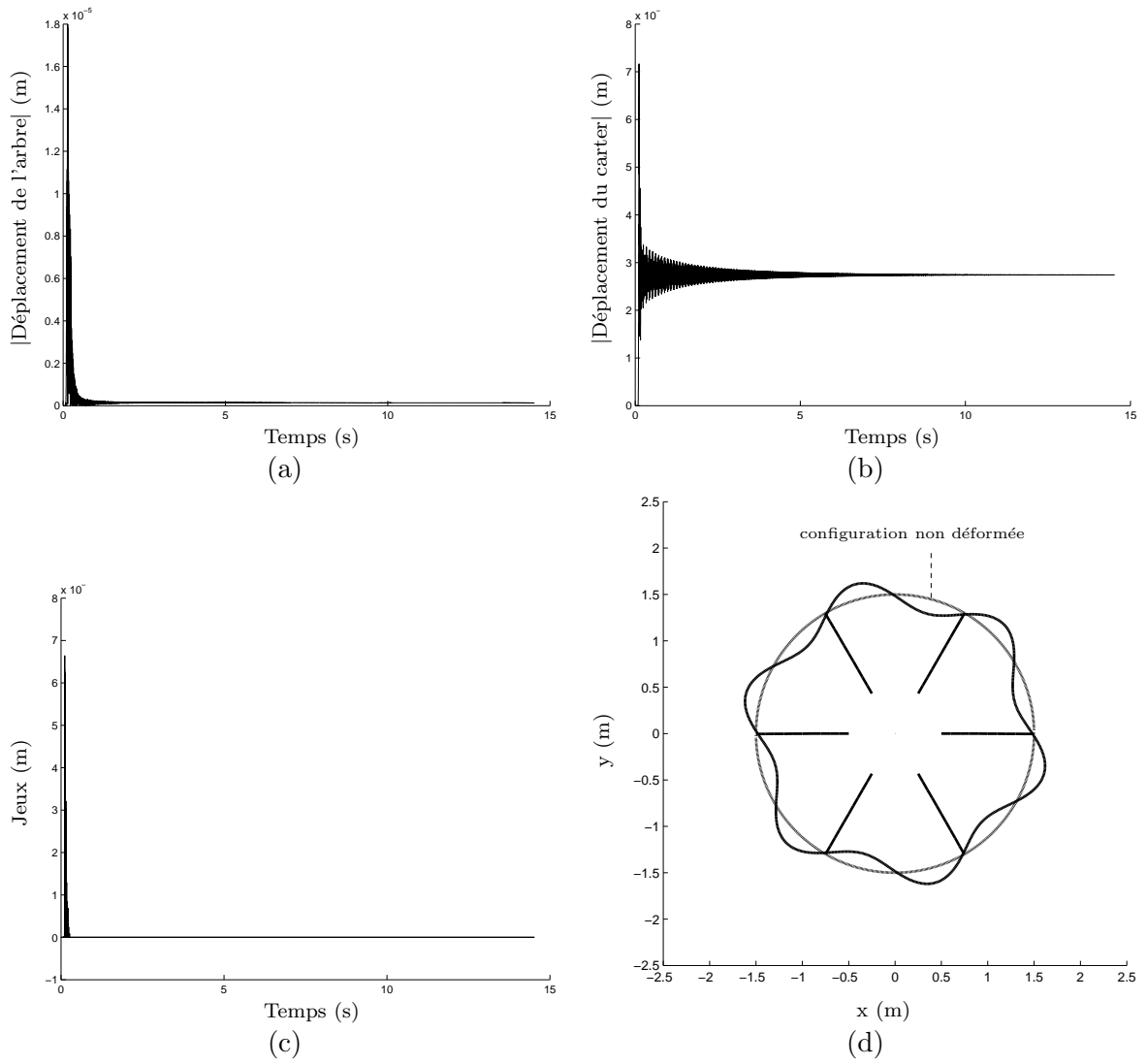


FIG. 6.34 – Déplacements (a) de l'arbre tournant à  $\Omega = 860$  tr/min, (b) du carter non linéaire avec  $k_{NL} = 1.10^{11} \text{ N.m}^{-1}$ , (c) évolution des jeux entre les aubes et le carter, (d) déformée du système (déplacements amplifiés)



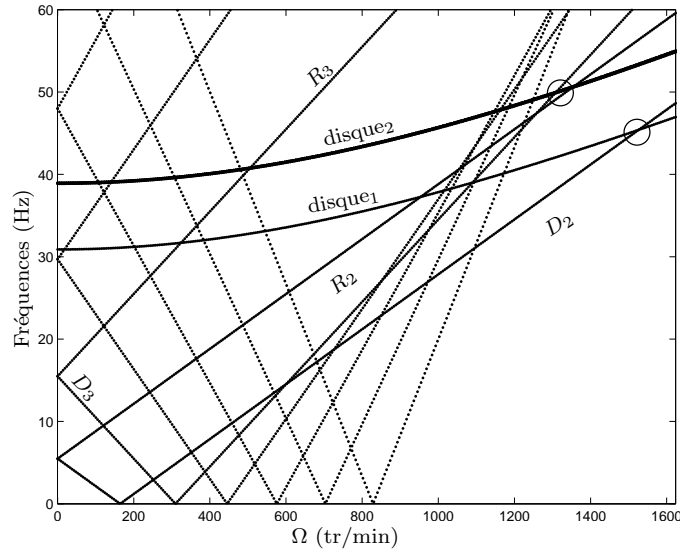


FIG. 6.35 – Superposition des diagrammes de Campbell d'un carter non linéaire avec  $k_{NL} = 1.10^{11} \text{ N.m}^{-1}$  et d'un disque aubagé dont les aubes sont couplées

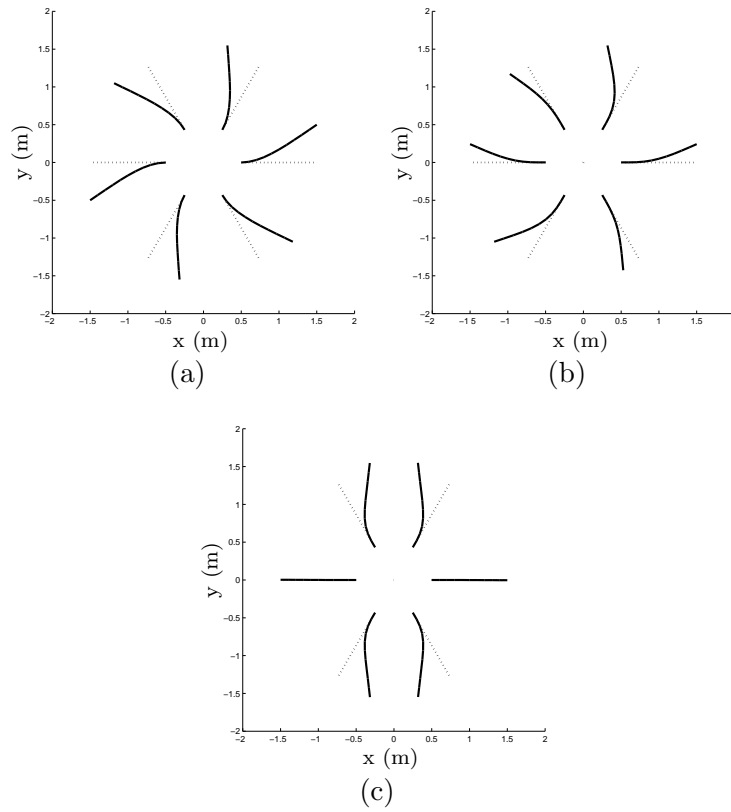


FIG. 6.36 – (a) Premier, (b) deuxième et (c) troisième mode de disque aubagé d'un rotor ayant des aubes couplées

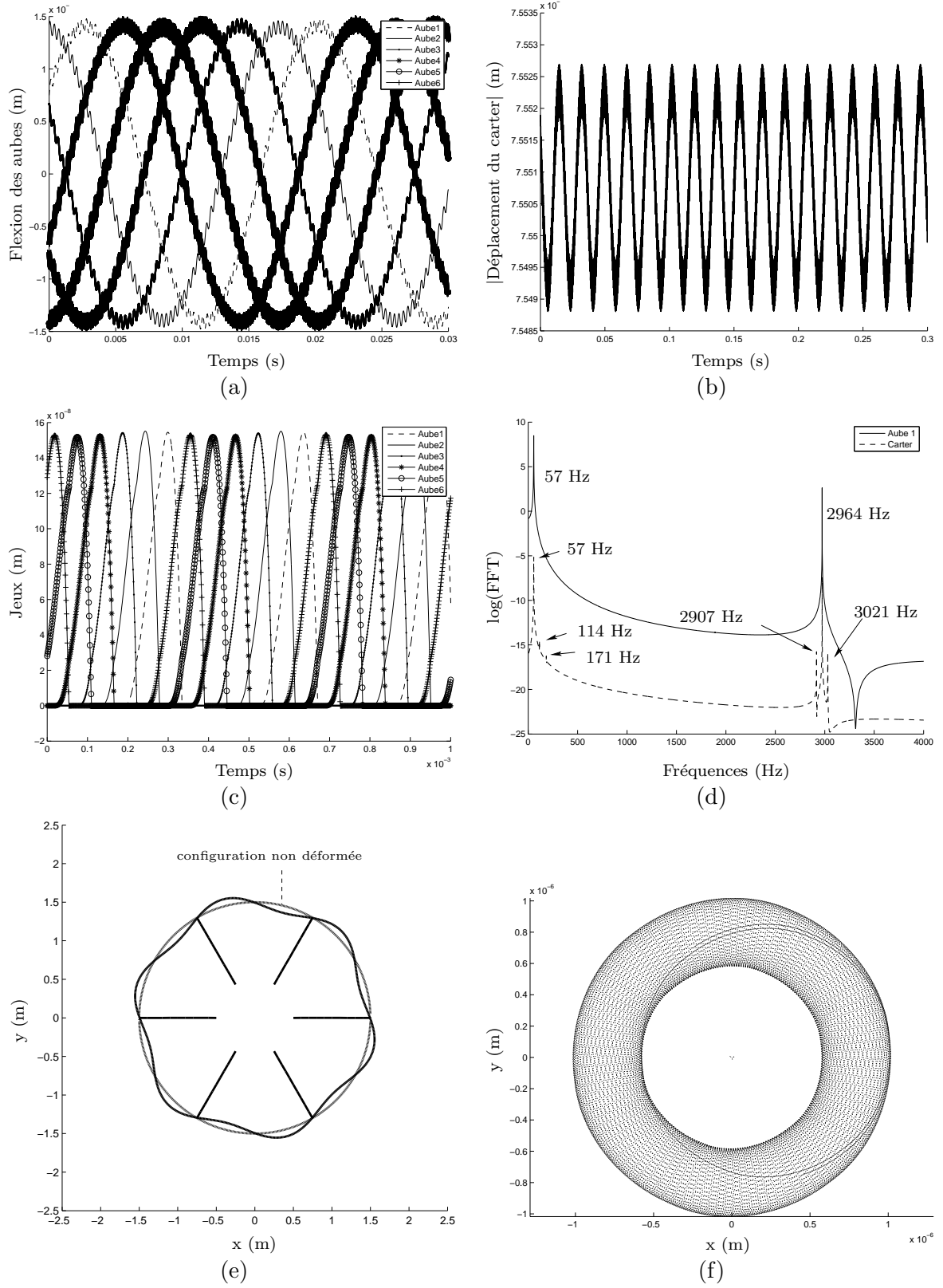


FIG. 6.37 – Déplacements (a) des aubes d'un arbre tournant à  $\Omega = 1528$  tr/min, (b) du carter non linéaire avec  $k_{NL} = 1.10^{11} \text{ N.m}^{-1}$ , (c) évolution des jeux entre les aubes et le carter, (d) spectre fréquentiel des déplacements, (e) déformée du système (déplacements amplifiés), (f) orbite de l'arbre

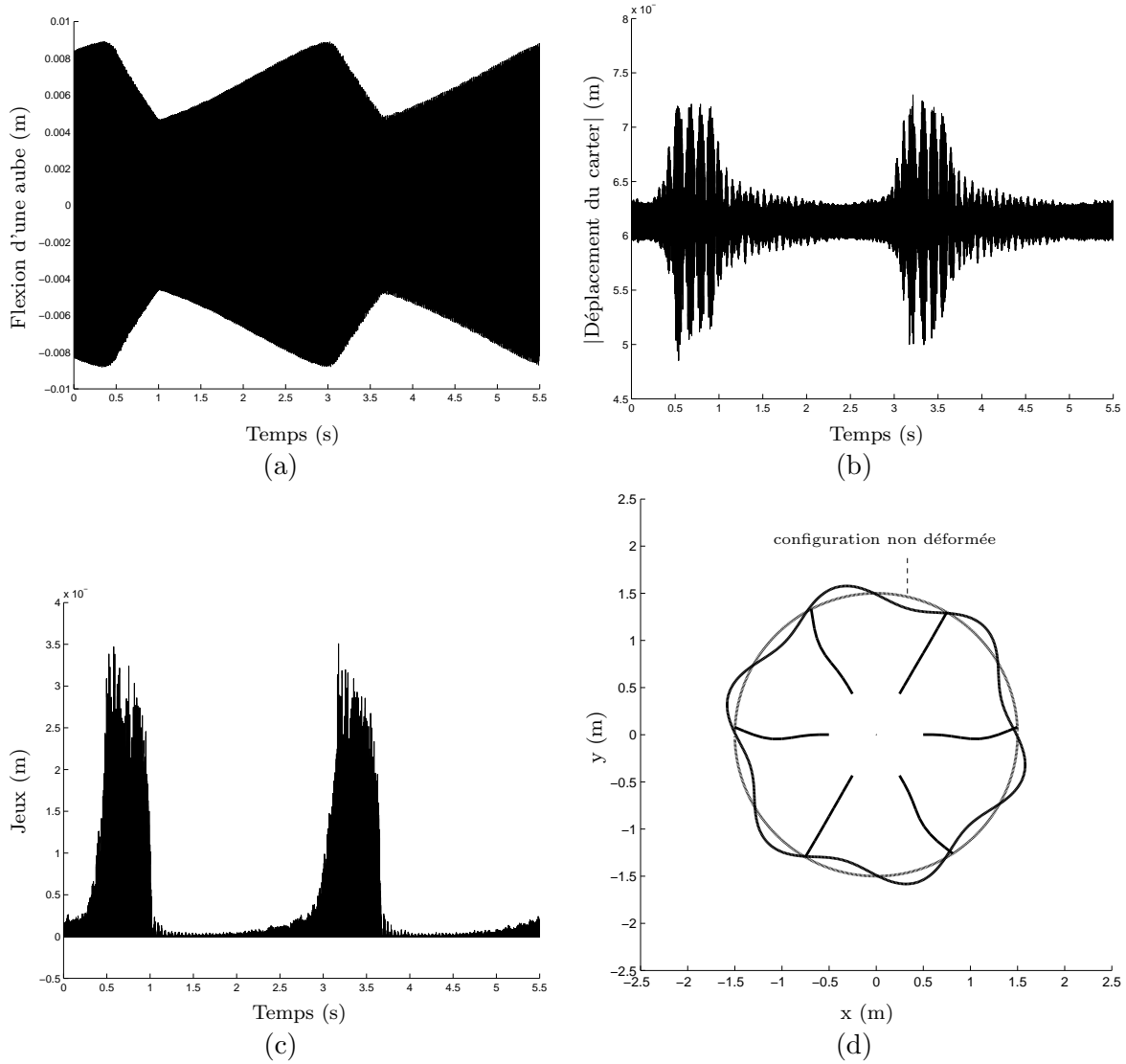


FIG. 6.38 – Déplacements (a) d'une aube d'un arbre tournant à  $\Omega = 1308$  tr/min, (b) du carter non linéaire avec  $k_{NL} = 1.10^{11} \text{ N.m}^{-1}$ , (c) évolution des jeux entre les aubes et le carter, (d) déformée du système (déplacements amplifiés)

## 6.3 Contact frottant

La dernière partie de cette étude consiste à étudier l'influence du frottement sur la dynamique du rotor flexible aubagé en cas de contacts avec le carter. Nous avons vu au chapitre 5 que le frottement pouvait être à l'origine de comportement dynamique dans des plages de vitesses de rotation où sans frottement, le système adoptait une configuration statique. Il faut cependant noter qu'une différence majeure entre les modèles phénoménologiques développés au chapitre 5 et le présent modèle de rotor flexible existe et réside dans l'existence d'un arbre qui peut déplacer l'ensemble du disque aubagé.

Le frottement est introduit comme au chapitre 5, section 5.2.1 c'est-à-dire, par l'intermédiaire de son travail. Le point de contact, entre une aube positionnée à l'angle  $\phi_j$  dans le repère tournant et le point du carter en vis à vis situé à l'angle  $\theta_j$  dans ce même repère, est déterminé à partir des degrés de liberté prédits. Le travail de la force de frottement alors mise en jeu s'exprime par :

$$W_{T_j}^{ML} = \mu \lambda_{N_j} \text{sign}(V_{slip}) \left[ w(\theta_j, t) \left\{ 1 - \frac{h}{2R_{stat}} \right\} - \frac{h}{2R_{stat}} \frac{\partial u_s}{\partial \phi}(\theta_j, t) - (v(l, t) \cos \phi_j - u(l, t) \sin \phi_j + \eta_j(L, t) \cos \beta) \right] \quad (6.32)$$

avec

$$V_{slip} = \left\{ \dot{v}(l, t) \cos \phi_j - \dot{u}(l, t) \sin \phi_j + \dot{e}a_j(L, t) \cos \beta + \Omega (v(l, t) \sin \phi_j + u(l, t) \cos \phi_j + R) \right\} - \left\{ \dot{w}(\theta_j, t) \left( 1 - \frac{h}{2R_{stat}} \right) - \frac{h}{2R_{stat}} \frac{\partial \dot{u}_s}{\partial \phi}(\theta_j, t) - \Omega \left( \frac{\partial w}{\partial \phi}(\theta_j, t) \left( 1 - \frac{h}{2R_{stat}} \right) - \frac{h}{2R_{stat}} \frac{\partial^2 u_s}{\partial^2 \phi}(\theta_j, t) \right) \right\} \quad (6.33)$$

L'étude de l'influence du frottement sera faite en deux étapes. Premièrement, le carter sera considéré comme rigide. Nous allons ainsi nous ramener à des simulations proches de celles couramment étudiées c'est-à-dire avec un disque rigide. Puis, dans une seconde partie, le stator sera flexible, d'abord avec une seule fonction de Ritz pour décrire ses déplacements puis, avec sept modes, le disque aubagé étant toujours proche d'une structure indéformable. Enfin, la flexibilité des aubes sera considérée et son influence sur le comportement du système, en cas de frottement, sera analysée.

### 6.3.1 Carter rigide

Dans cette partie, le carter est supposé infiniment rigide. Dans ce cas, le travail de la force de frottement peut être déduit simplement des équations 6.32 et 6.33, en ne tenant pas compte des termes relatifs aux degrés de liberté du carter. La composante tangentielle de la force de contact qui en résulte est alors donnée par :

$$\mathbf{F}_{\text{contact}T} = -\mathbf{C}_T \lambda_{N_j} \quad (6.34)$$

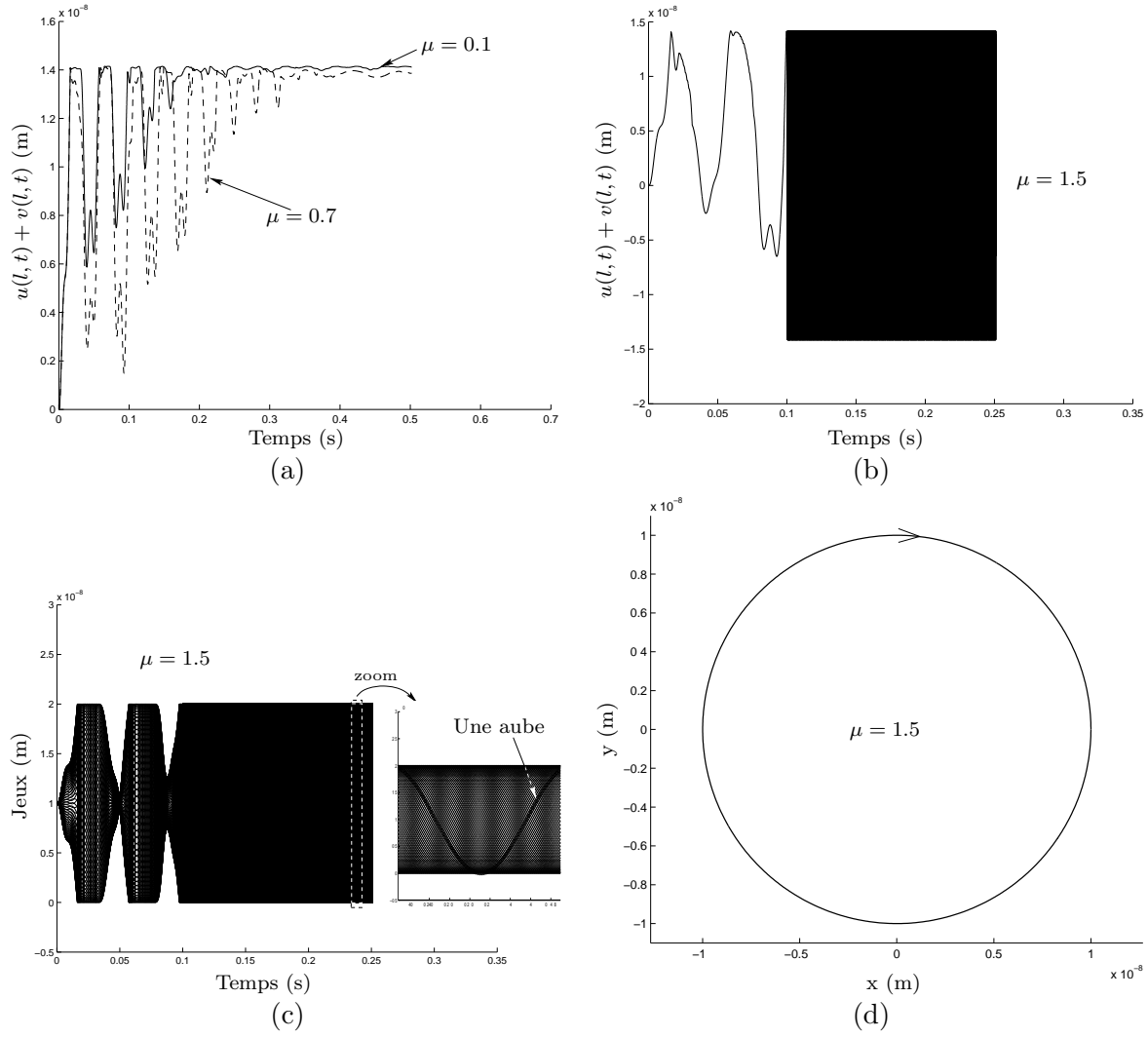


FIG. 6.39 – Déplacements de l'arbre d'un rotor possédant 90 aubes rigides frottant contre un carter rigide avec (a)  $\mu = 0.1$  et  $\mu = 0.7$ , (b)  $\mu = 1.5$ , (c) évolution des jeux entre les aubes et le carter, (d) orbite de l'arbre

avec

$$\mathbf{C_T} = \begin{bmatrix} -\mu \sin \phi_j & \mu \cos \phi_j & -\mu \sin \phi_j W_1(l) & \mu \cos \phi_j W_1(l) & \cdots \\ \cdots & -\mu \sin \phi_j W_{m_{tot}}(l) & \mu \cos \phi_j W_{m_{tot}}(l) & \mu Y_{1_j}(L) & \cdots & \mu Y_{N_{totj}}(L) \end{bmatrix}^T \quad (6.35)$$

La procédure de gestion des contacts ainsi que les corrections à apporter aux degrés de liberté du système, le cas échéant, ont été explicitées au chapitre 5, section 5.2.1.

Nous allons nous placer dans un cas proche de ceux répertoriés dans la littérature afin de valider le cas du modèle complet en présence de frottement. Généralement, les études sur le contact frottant entre un rotor et un stator, impliquent un disque plein au lieu d'un disque au-

bagé flexible. Nous allons donc considérer un rotor possédant un nombre élevé d'aubes rigides afin de se rapprocher de cette configuration. Dans cette partie, le rotor considéré possède 90 aubes rigides. Le comportement dynamique de ce système, en cas de contact avec un carter infiniment rigide, suite à une excitation par balourd, est représenté sur la figure 6.39 (a) dans le cas d'un coefficient de frottement  $\mu = 0.1$  et  $\mu = 0.7$ . Cette figure illustre le déplacement de l'arbre du rotor au cours du temps. On voit ainsi que pour des coefficients de frottement faibles, le système tend vers une configuration statique à contacts permanents sur les aubes en accord avec la force d'excitation. Il apparaît aussi que le régime transitoire du système atteint des amplitudes plus grandes lorsque le coefficient de frottement augmente. Lorsque celui-ci augmente d'avantage, le système se met à tourner de façon permanente tout en frottant contre le carter, comme le montrent les figures 6.39 (b), (c) et (d). Sur la figure 6.39 (c), on voit notamment que les 90 aubes du rotor entrent en contact avec le carter les unes à la suite des autres au cours de l'orbite circulaire rétrograde du rotor.

Ainsi, ce premier résultat est en accord avec les nombreuses études faites dans le cas de modèles plus simples [23, 18, 78, 9, 26] impliquant un rotor constitué d'un disque plein frottant contre un carter rigide : au dessus d'un certain coefficient de frottement, le rotor s'anime d'un mouvement de tournoiement rétrograde en contact permanent avec la face interne du stator. La même étude réalisée avec un nombre réduit de points de contact, c'est-à-dire avec un rotor possédant 6 aubes rigides, montre le même comportement. Il convient maintenant d'étudier l'influence de la flexibilité des structures sur ce dernier.

### 6.3.2 Carter flexible

Nous allons désormais considérer un carter élastique. Dans ce cas, l'introduction du frottement se fait conformément aux relations 6.32 et 6.33. La composante tangentielle de la force de contact qui en résulte peut alors se mettre sous la même forme que l'équation 6.34 mais avec :

$$\mathbf{C_T} = \begin{bmatrix} -\mu \sin \phi_j & \mu \cos \phi_j & -\mu \sin \phi_j W_1(l) & \mu \cos \phi_j W_1(l) & \cdots & -\mu \sin \phi_j W_{m_{tot}}(l) \\ \mu \cos \phi_j W_{m_{tot}}(l) & \mu Y_{1j}(L) & \cdots & \mu Y_{N_{totj}}(L) & -\mu \left(1 - \frac{h}{2R_{stat}}\right) \cos 2\theta_j \\ -\mu \left(1 - \frac{h}{2R_{stat}}\right) \sin 2\theta_j & \cdots & -\mu \left(1 - \frac{h}{2R_{stat}}\right) \cos k_{tot}\theta_j & -\mu \left(1 - \frac{h}{2R_{stat}}\right) \sin k_{tot}\theta_j \end{bmatrix}^T \quad (6.36)$$

#### Carter possédant un seul mode de déformation et aubes rigides

Nous allons dans un premier temps considérer une seule fonction de Ritz pour exprimer les déplacements de l'anneau. La fonction correspondant au mode à trois diamètres sera considérée. Le carter ne pourra donc se déformer que selon ce mode en cas de contacts. Le disque possède quant à lui 6 aubes rigides et le contact est supposé être initié, comme précédemment, par la force de balourd. Il se trouve qu'en dessous d'un certain coefficient de frottement critique, proche de l'unité, le système adopte, après un régime transitoire, une configuration statique à contacts permanents. Par contre, dès que  $\mu$  atteint 1, son comportement

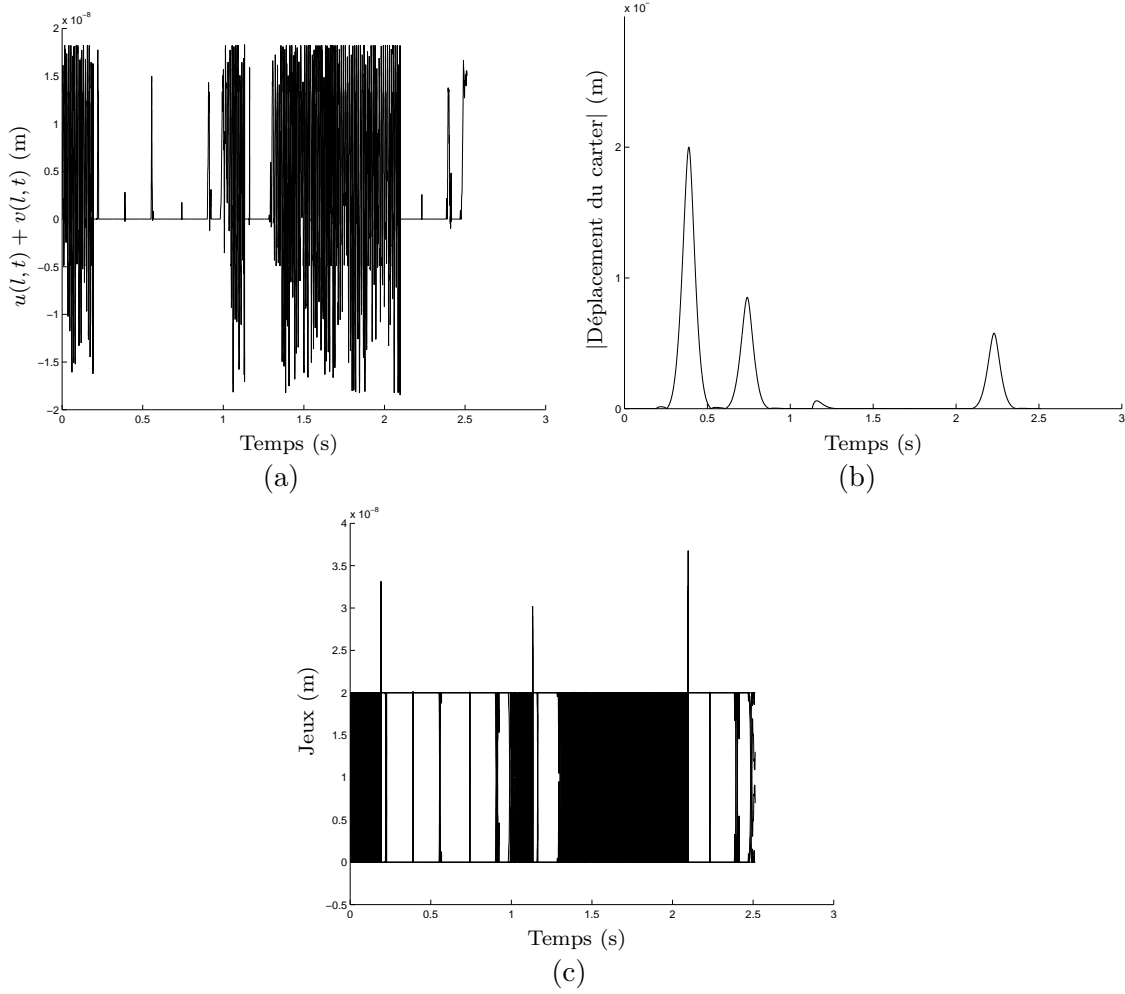


FIG. 6.40 – (a) Déplacements d'un arbre possédant un disque aubagé de 6 aubes rigides tournant à  $\Omega = 286$  tr/min et frottant contre un carter possédant un seul mode avec  $\mu = 1$ , (b) déplacements du carter, (c) évolution des jeux entre les aubes et le carter

dynamique est chaotique, comme le montre la figure 6.40, dans le cas où le rotor tourne à  $\Omega = 286$  tr/min (vitesse à laquelle l'effet du frottement a été étudié au travers des modèles phénoménologiques, située avant la page de divergence du carter). Ce comportement possède cependant certaines zones particulières, que ce soit au niveau du déplacement de l'arbre, du carter ou des jeux, qui sont détaillées sur la figure 6.41 et doivent être expliquées.

La figure 6.41 (c), représentant un zoom sur les jeux entre les aubes et le carter, montre que l'évolution de ceux-ci est majoritairement chaotique mais peut tendre, après une phase d'accélération des prises de contacts, vers des contacts établis. Cette même figure montre ainsi qu'une configuration où les aubes ②, ④ et ⑥ touchent le carter s'établit pendant 0,13 seconde (entre 2,1 s et 2,23 s). Cette configuration est, comme nous l'avons vu au chapitre 5, une configuration d'équilibre statique stable pour le système linéaire sans frottement où le mode à trois diamètres nodaux du carter est considéré. C'est pour cette raison que le système tente de l'adopter. Cependant, nous avons également vu au chapitre 5 que l'amplitude des

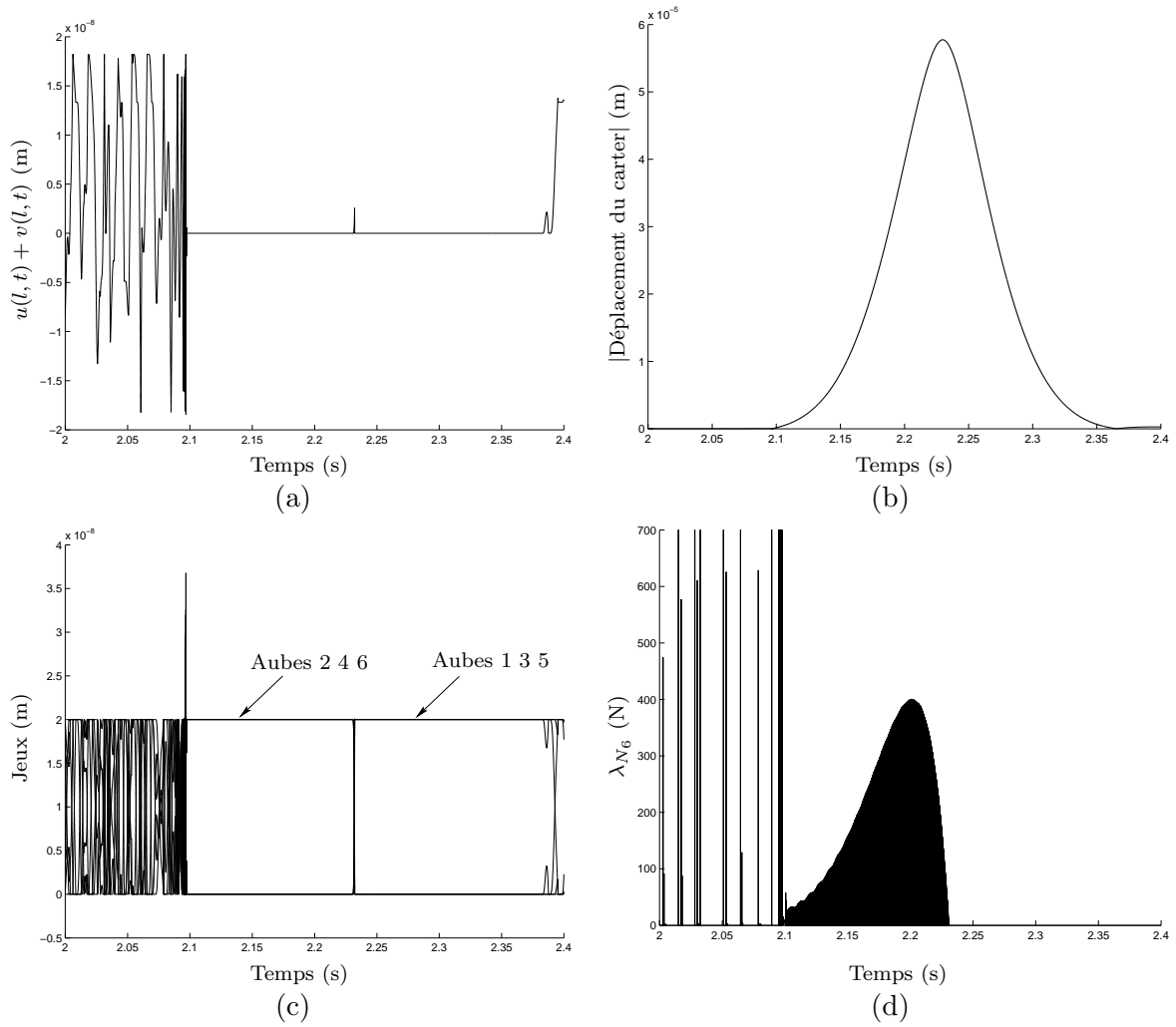


FIG. 6.41 – (a) Zoom de la figure 6.40(a), (b) zoom de la figure 6.40(b), (c) zoom de la figure 6.40(c), (d) évolution du multiplicateur de Lagrange  $\lambda_{N_6}$  associé à l'aube 6

déformations d'un tel système est maximale lorsque la position des aubes en contact est en adéquation avec la déformée de l'anneau, ce qui est précisément le cas. Les forces généralisées étant donc en augmentation juste après la prise de contact sur les aubes ②, ④ et ⑥, comme en atteste la figure 6.41 (d), le carter va voir ses déformations croître comme le montre la figure 6.41 (b). Il en résulte également que les forces de frottement vont croître. Le disque va alors perdre ses contacts sur les aubes ②, ④ et ⑥ et les reprendre sur les aubes ①, ③ et ⑤. La déformée du carter n'étant alors plus en adéquation avec la configuration des contacts, ses amplitudes vont décroître et rendre possible les contacts sur d'autres aubes.

D'une manière générale, il apparaît que la présence de frottement va donner une composante tangentielle à la force de contact qui va alors influencer sur le déplacement de l'arbre du rotor. L'existence de contacts étant de plus conditionnée par les déplacements du carter et par la position des aubes, le comportement du système est difficilement prévisible.

Une fois le comportement de ce système simple détaillé, il semble peu probable que la flexibilité des aubes et l'augmentation de celle du carter rende ce dernier plus simple.



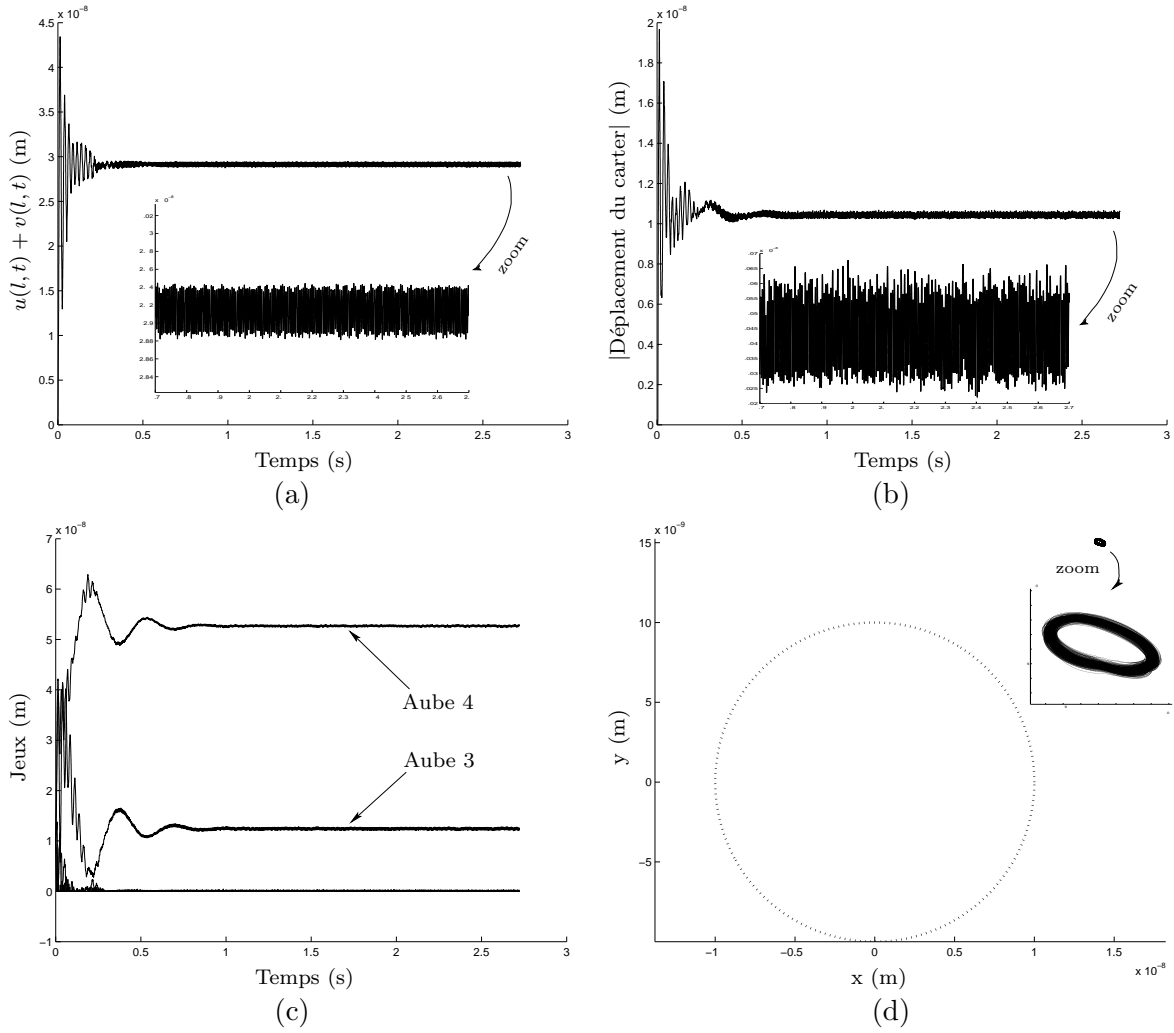


FIG. 6.42 – (a) Déplacements d'un arbre possédant un disque aubagé de 6 aubes rigides frottant contre un carter élastique avec  $\mu = 0.4$ , (b) déplacements du carter, (c) évolution des jeux entre les aubes et le carter, (d) orbite de l'arbre

### Carter possédant plusieurs modes de déformation et aubes rigides

Nous allons maintenant considérer plusieurs fonctions de Ritz pour décrire les déplacements du carter. Par contre, les 6 aubes du disque sont toujours rigides. En cas de contacts initiés par une force de balourd, le rotor, frottant avec  $\mu = 0.4$  contre le carter flexible, adopte une configuration qui est en première approximation statique. Cependant, comme le montre la figure 6.42, cette dernière présente des oscillations rapides autour de sa configuration statique. Sur cette figure, il apparaît que seules deux aubes sont toujours en contact avec le stator. Le système est animée de faibles oscillations à fréquences élevées autour de sa position statique. L'arbre décrit ainsi des orbites localisées contre le carter dans la direction imposée par la force de balourd (Cf. figure 6.42 (d) où est tracé en pointillés un cercle centré sur l'axe du repère tournant et de rayon égal au jeu initial entre les aubes et le carter). Lorsque le coefficient

de frottement augmente, le comportement du système devient plus perturbé et son spectre fréquentiel, plus dense, comme le montre la figure 6.43, et la figure 6.44 dans le cas d'un coefficient de frottement  $\mu = 1$ . Lorsque le coefficient de frottement augmente encore, le système est complètement chaotique et présente une montée en amplitude brutale (Cf. figure 6.45), où toutes les aubes entrent en contact avec le carter.

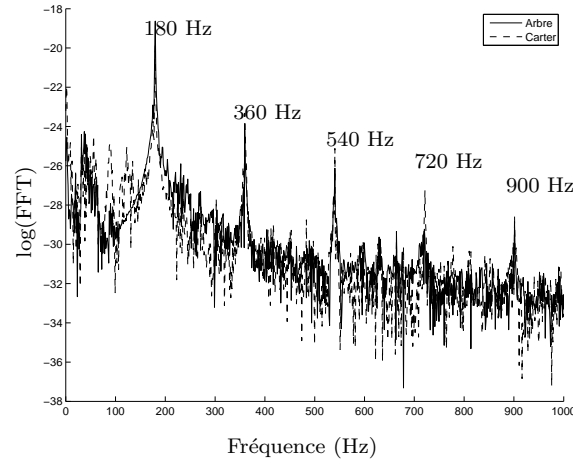


FIG. 6.43 – Spectre fréquentiel du système associé à la figure 6.42

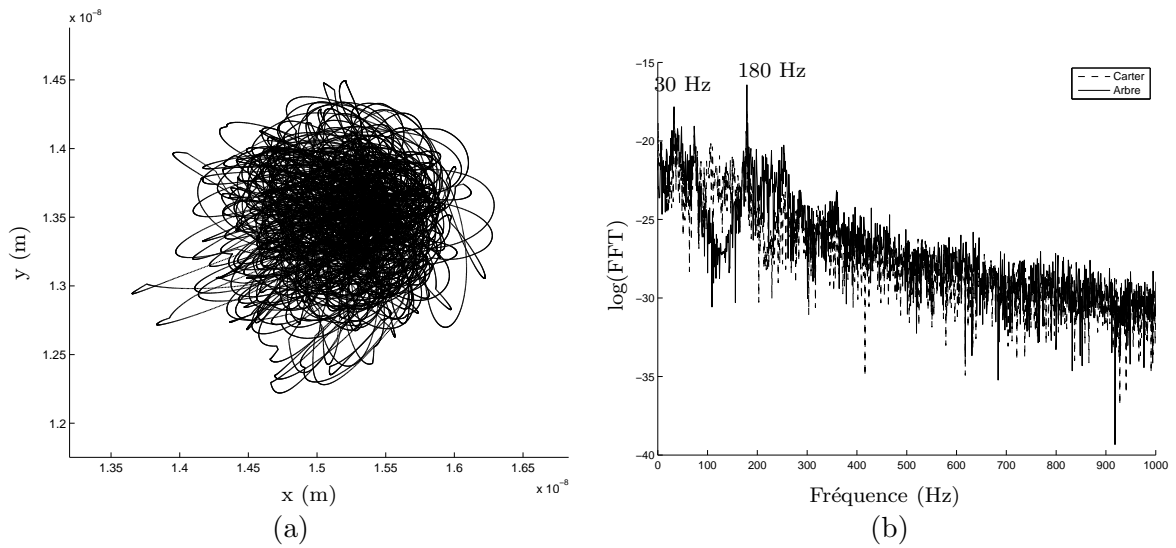


FIG. 6.44 – (a) Zoom sur l'orbite d'un arbre possédant un disque aubagé de 6 aubes rigides frottant contre un carter élastique avec  $\mu = 1$ , (b) spectre fréquentiel associé

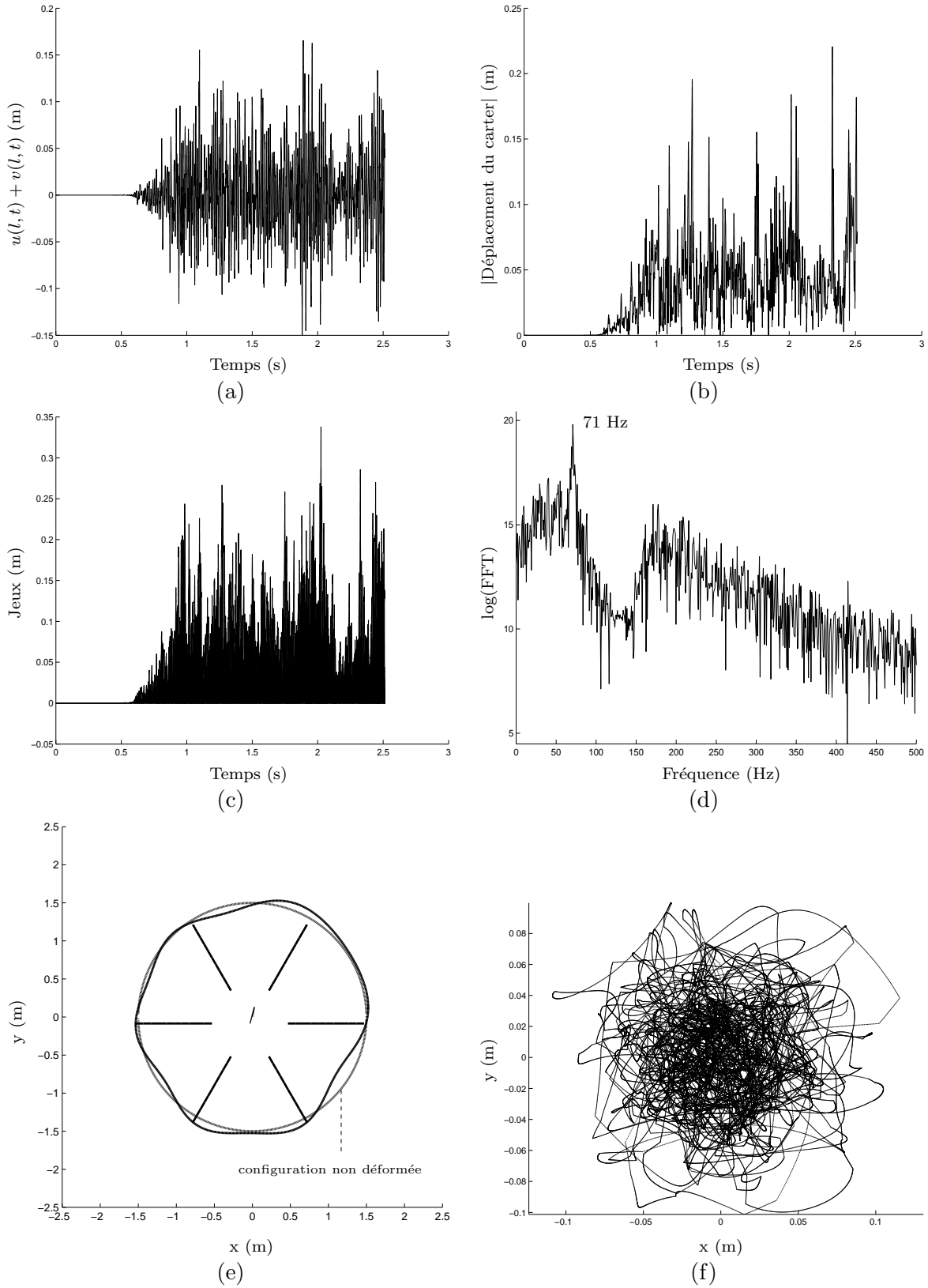


FIG. 6.45 – (a) Déplacements d'un arbre possédant un disque aubagé de 6 aubes rigides frottant contre un carter élastique avec  $\mu = 1.5$ , (b) déplacements du carter, (c) évolution des jeux entre les aubes et le carter, (d) spectre fréquentiel de la dynamique de l'arbre, (e) déformée du système (déplacements amplifiés) et (f), orbite de l'arbre

### Carter possédant plusieurs modes de déformation et aubes flexibles

Enfin, nous allons considérer un disque possédant des aubes flexibles. Toutefois, nous allons voir l'influence de la rigidité en flexion des aubes sur le comportement dynamique du système. Avec un coefficient de frottement  $\mu = 0.4$ , le système possédant des aubes flexibles est chaotique en cas de contacts avec le carter. De plus, comme le montre la figure 6.46, plus les aubes sont souples en flexion, plus l'augmentation des amplitudes de vibrations du système, évoquée précédemment (Cf. figure 6.45), intervient tôt.

Jusqu'ici, toutes les simulations présentées ont été réalisées à des vitesses de rotation inférieures à la vitesse critique du mode à trois diamètres nodaux du carter, mode à partir duquel les configurations statiques stables pour le carter linéaire n'existent plus, comme nous l'avons vu. Cependant, tous les résultats que nous venons de voir concernant l'influence du frottement, restent valables après cette vitesse. Ainsi, le système possédant un carter non linéaire qui adopte, en l'absence de frottement, un comportement dynamique ou statique en fonction de la valeur des non linéarités, pourra adopter en présence de frottement, un comportement vibratoire rapide autour de la configuration sans frottement ou, si le coefficient de frottement est suffisamment important, un comportement chaotique avec des amplitudes de vibrations importantes et des contacts intermittents sur toutes les aubes.

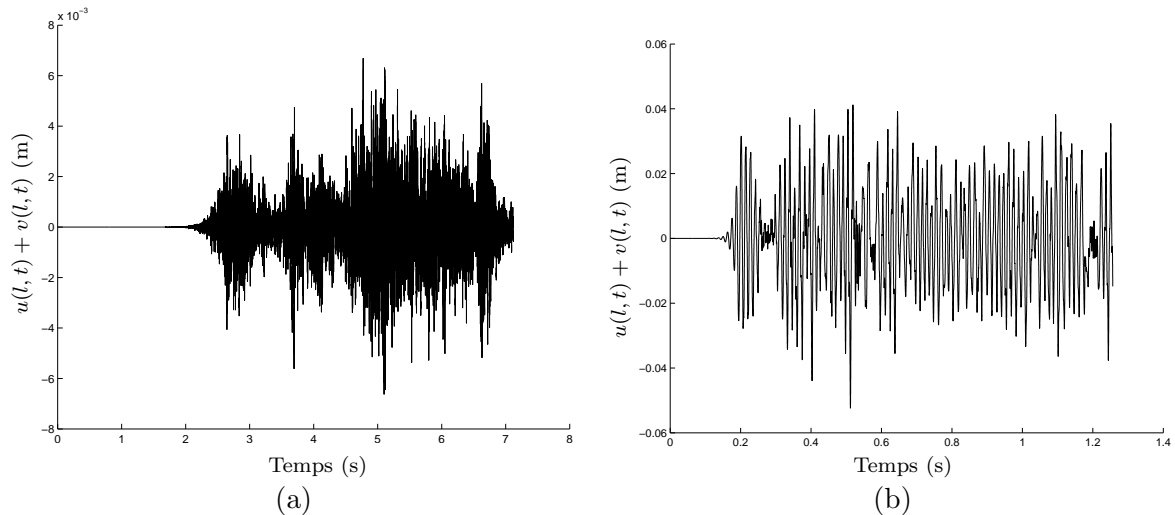


FIG. 6.46 – Déplacements d'un arbre possédant un disque aubagé de 6 aubes flexibles de module d'Young (a)  $E_b = 3,55.10^{13}$  Pa, (b)  $E_b = 3,55.10^{11}$  Pa, frottant contre un carter élastique avec  $\mu = 0.4$

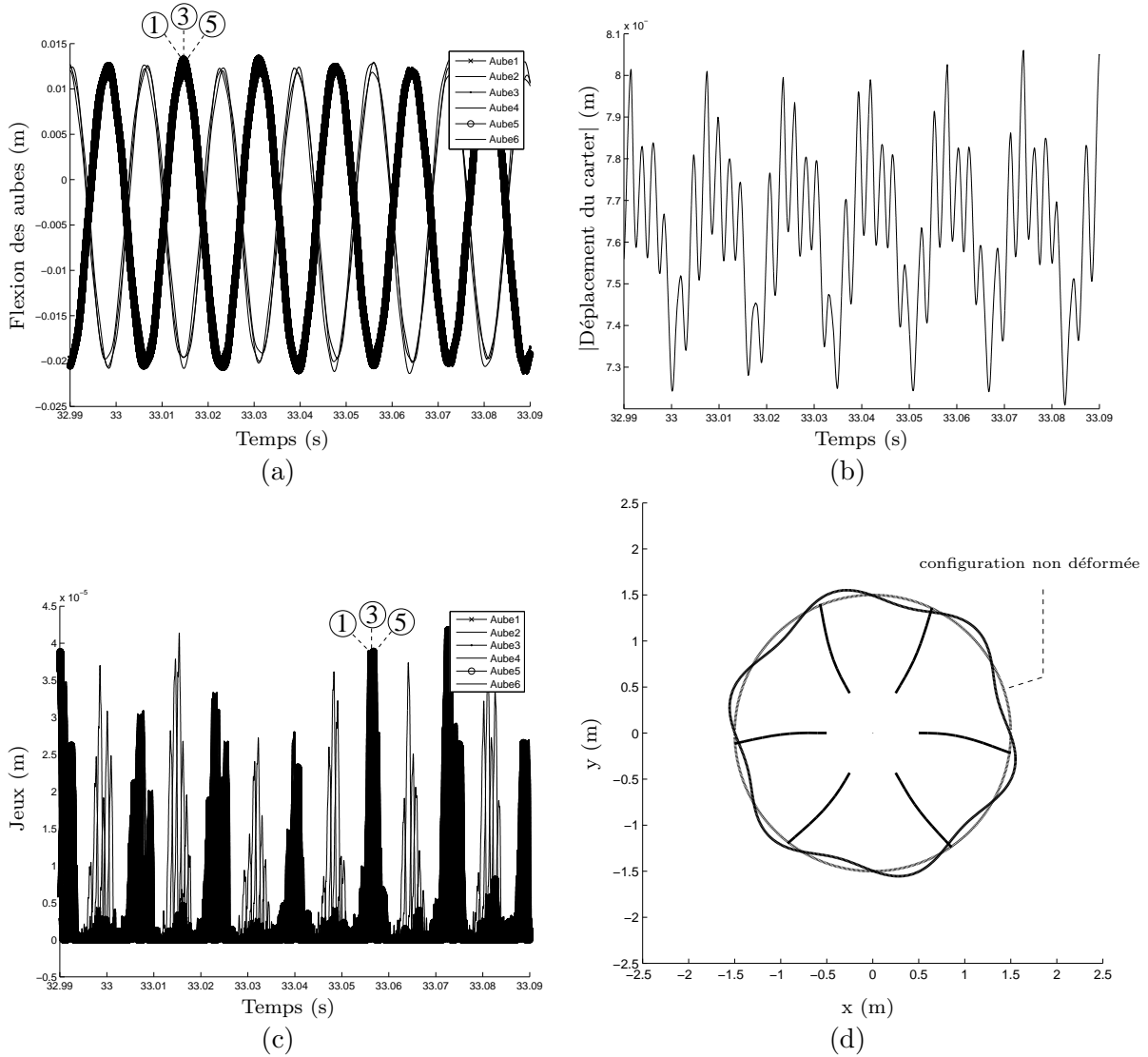


FIG. 6.47 – (a) Flexion de 6 aubes en titane d’un arbre tournant à  $\Omega = 1528$  tr/min, frottant contre un carter élastique non linéaire avec  $k_{NL} = 1.10^{11} \text{ N.m}^{-1}$  et  $\mu = 0.1$ , (b) déplacements du carter, (c) évolution des jeux entre les aubes et le carter suite à un choc, (d) déformée du système (déplacements amplifiés)

Pour clore cette étude sur l’influence du frottement, nous allons étudier son impact sur la dynamique du système observée à  $\Omega = 1528$  tr/min entre un rotor flexible aubagé et un carter élastique, suite à un choc sur ce dernier. Les résultats sont représentés sur les figures 6.47 à 6.50 pour trois coefficients de frottement différents. Il ressort ainsi que pour un coefficient de frottement  $\mu = 0.1$  (Cf. figure 6.47), le système possède une dynamique proche de celle qu’il avait sans frottement (Cf. figure 6.37). Celle-ci possède cependant un spectre fréquentiel plus dense et surtout des fréquences différentes, comme le montre la figure 6.50 (b). De plus, la figure 6.47 (a) montre que la présence de frottement provoque des déplacements plus organisés des aubes entre elles. Lorsque le coefficient de frottement augmente, le système devient plus

chaotique avec des amplitudes accrues de même qu'une densité fréquentielle plus importante, comme le montrent les figures 6.48 à 6.50.

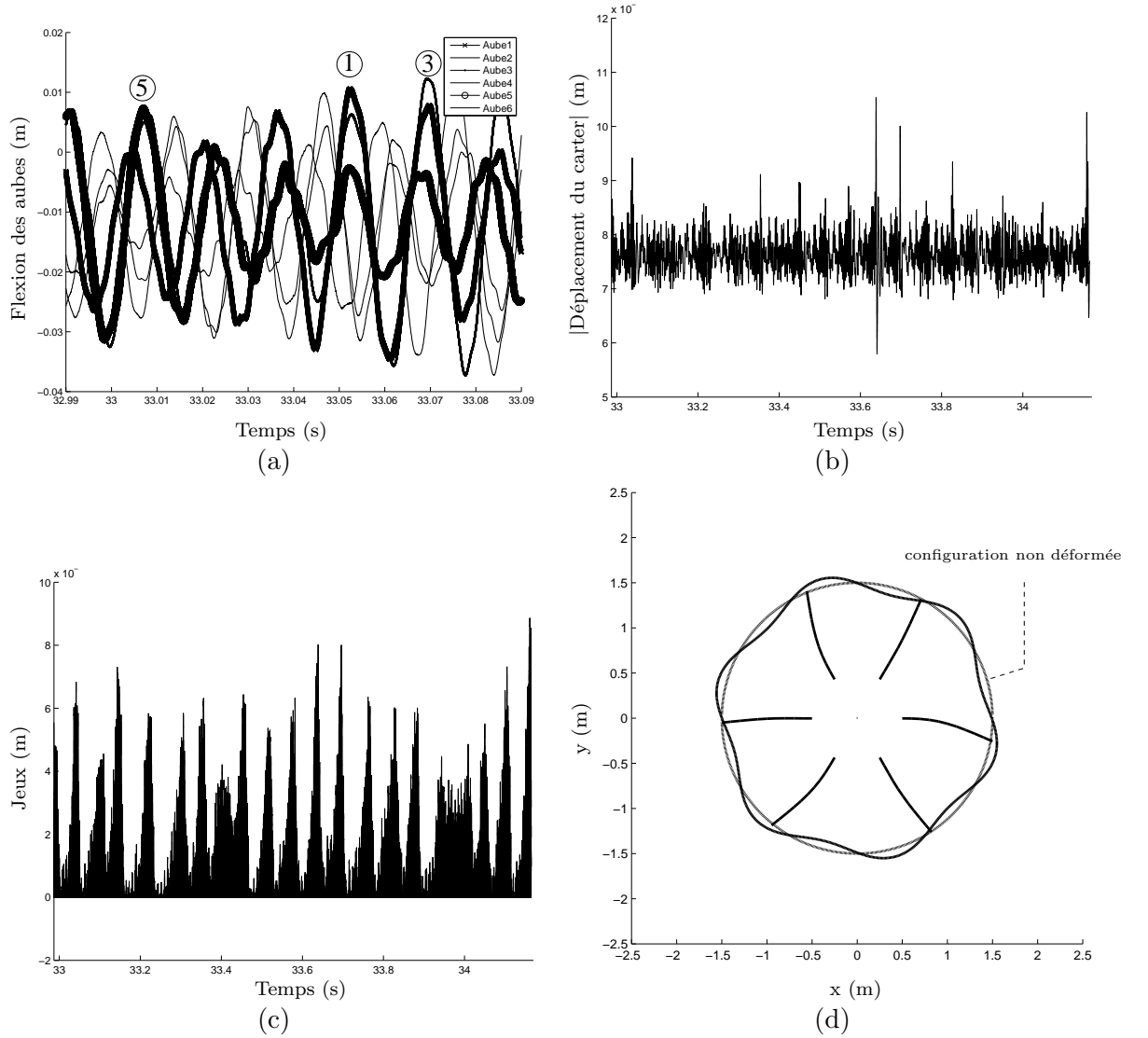


FIG. 6.48 – (a) Flexion de 6 aubes en titane d'un arbre tournant à  $\Omega = 1528$  tr/min, frottant contre un carter élastique non linéaire avec  $k_{NL} = 1.10^{11} \text{ N.m}^{-1}$  et  $\mu = 0.3$ , (b) déplacements du carter, (c) évolution des jeux entre les aubes et le carter suite à un choc, (d) déformée du système (déplacements amplifiés)

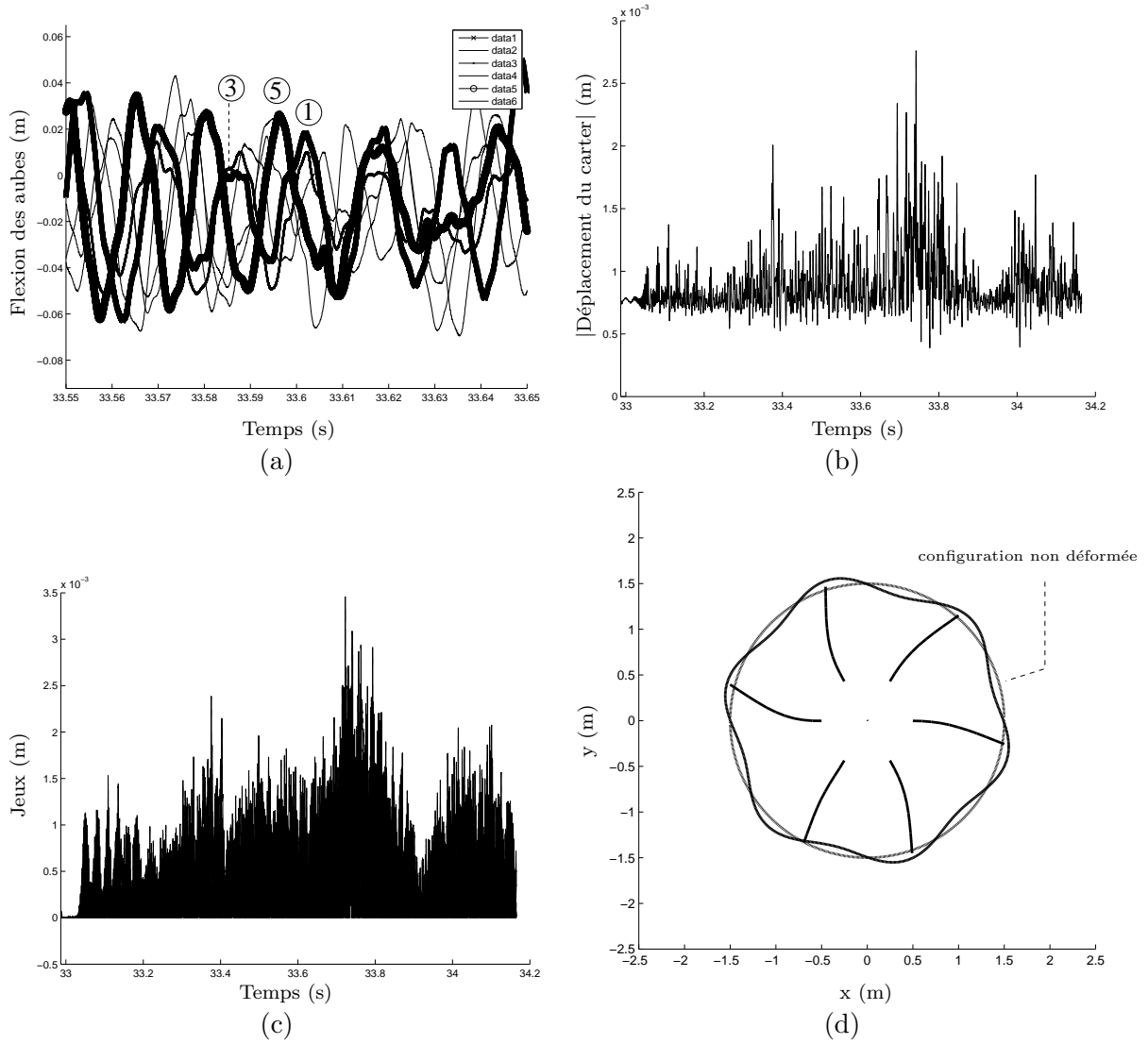


FIG. 6.49 – (a) Flexion de 6 aubes en titane d'un arbre tournant à  $\Omega = 1528$  tr/min, frottant contre un carter élastique non linéaire avec  $k_{NL} = 1.10^{11} \text{ N.m}^{-1}$  et  $\mu = 0.4$ , (b) déplacements du carter, (c) évolution des jeux entre les aubes et le carter suite à un choc, (d) déformée du système (déplacements amplifiés)

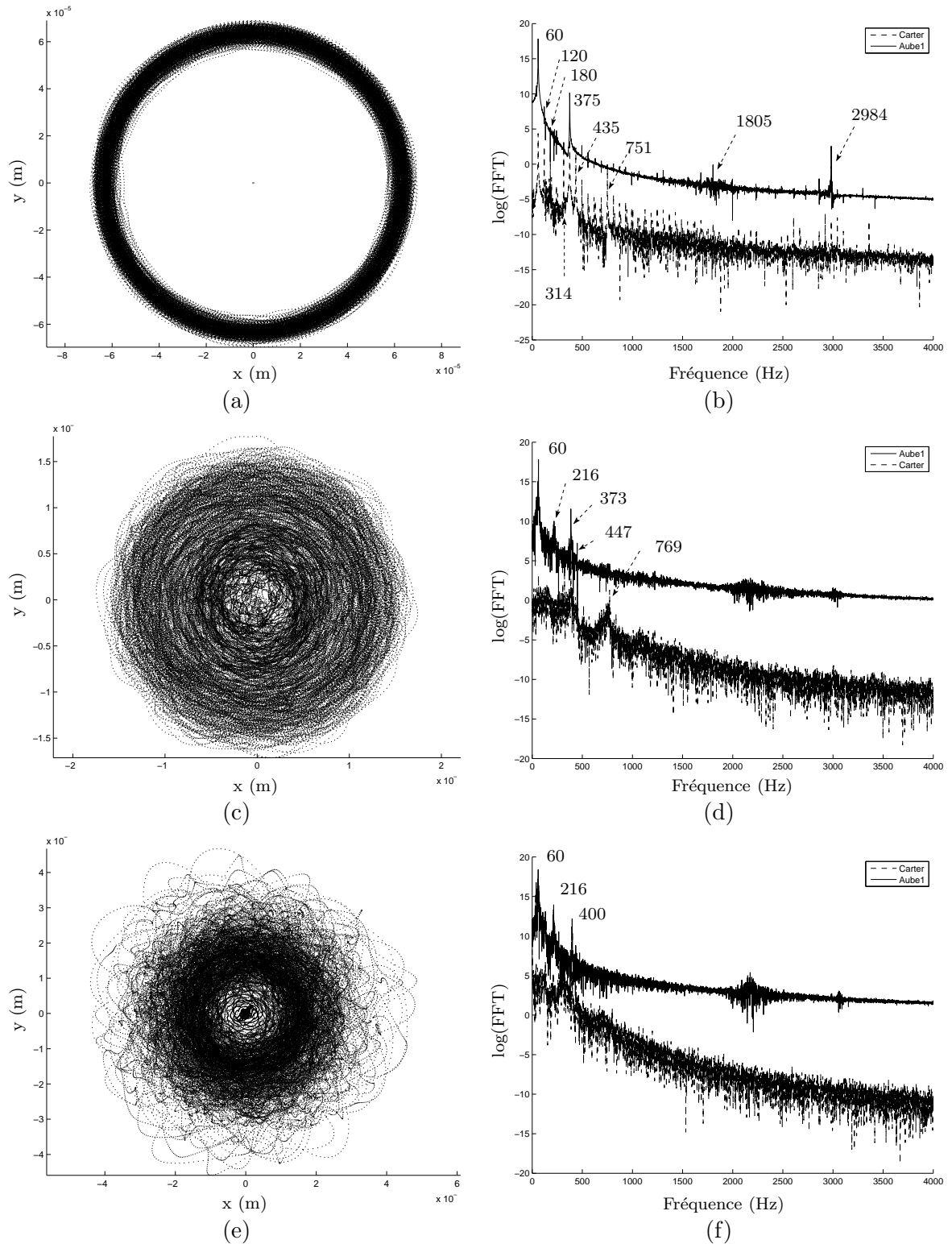


FIG. 6.50 – Orbite d'un arbre possédant un disque aubagé de 6 aubes en titane, tournant à  $\Omega = 1528$  tr/min, frottant contre un carter élastique non linéaire avec  $k_{NL} = 1.10^{11} \text{ N.m}^{-1}$  et (a)  $\mu = 0.1$ , (c)  $\mu = 0.3$  et (e)  $\mu = 0.4$ , (b), (d) et (e) représentant les spectres fréquentiels de la dynamique du système associé



## 6.4 Conclusion

Dans ce chapitre, un modèle complet de rotor flexible aubagé a été réalisé. Des études de stabilité ont montré des plages de vitesses de rotation où le rotor possédant des dissymétries est instable. Son comportement en cas de contacts avec un carter a ensuite été étudié. Des instabilités ont été décelées en cas de contacts avec un carter flexible et corrélées avec les études phénoménologiques réalisées au chapitre 5. Il a été montré que le système pouvait, dans les plages d'instabilité, adopter des configurations statiques ou dynamiques, en fonction des non linéarités considérées pour le carter et en fonction de la vitesse de rotation. Enfin, des comportements chaotiques du système ont été observés en cas de frottement. Il est apparu que la flexibilité des aubes, du carter et la flexion de l'arbre rendaient le comportement du système très complexe en présence de frottement à partir de certaines valeurs de coefficient de frottement.

# Conclusions et perspectives

Dans cette étude, l'influence de contacts entre le rotor d'un turboréacteur et le carter, au niveau de la stabilité et du comportement dynamique du système a été analysée.

Tout d'abord, des modèles simples d'interaction entre des structures tournantes et un carter élastique ont été réalisés dans le repère corotationnel afin d'appréhender la phénoménologie du contact rotor/stator. Des études de stabilité de ces modèles ont mis en évidence des plages d'instabilités ne résultant pas de la présence de frottement entre les structures. Le mode direct de l'anneau peut ainsi diverger au voisinage de sa vitesse critique puis, ses modes directs et rétrogrades peuvent se coupler à des vitesses de rotation généralement plus élevées. Les vitesses de rotation délimitant ces plages instables ont été exprimées analytiquement dans le cas d'un contact sur une seule aube. Des couplages entre le mode de flexion des aubes tournantes et les modes de l'anneau peuvent également avoir lieu si leurs fréquences sont proches. Il a été démontré que l'angle d'incidence des aubes sur le carter peut affecter les vitesses associées aux instabilités. Quant au frottement, son effet déstabilisant sur le mode rétrograde puis sur le direct de l'anneau a été souligné.

Le comportement dynamique de ces systèmes a ensuite été analysé par des intégrations temporelles directes. Lors de l'obtention de régimes périodiques, des méthodes non linéaires s'affranchissant du régime transitoire du système ont été appliquées. Des méthodes de tirs ont semblé adaptées à la dynamique de ces systèmes, sauf en cas de fluctuations rapides des efforts qui rendent alors l'estimation des gradients du système délicate. Dans les cas particuliers où les fréquences des réponses du système étaient connues a priori, des méthodes de balance harmoniques ont donné de bons résultats. Une méthode de balance harmonique couplée à une optimisation sur la stabilité de la solution recherchée a également été implémentée sur un système possédant peu de degrés de liberté et a donné des résultats satisfaisants.

Il a été mis en évidence que, dans les plages de divergence du système linéaire, le système dont le carter possède des non linéarités influant sur ses grands débattements peut adopter des configurations statiques à contacts permanents. Il peut également adopter un comportement dynamique dans les plages de couplages de modes du système linéaire ou, en présence de frottement. Il faut remarquer que sans frottement et après les vitesses critiques des modes du carter, le système tend toujours à conserver le contact entre les aubes et le stator du fait de la réponse en opposition de phase de ce dernier par rapport à l'excitation produite par les aubes.

Ces phénomènes ayant été mis en évidence, un modèle complet de rotor flexible aubagé a été développé dans le repère corotationnel en vue d'étudier son interaction avec un carter élastique. Ce modèle, constitué de fonctions de Ritz, prend en compte les effets gyroscopiques,

l'assouplissement et la rigidification centrifuges. Des études préliminaires de stabilité d'une telle structure flexible en rotation ont été menées et ont ainsi permis de retrouver des résultats connus sur la stabilité des structures dissymétriques en rotation.

L'interaction de cette structure avec un carter flexible a ensuite été étudiée. Il se trouve que des instabilités ont été décelées avec ce modèle et que celles-ci correspondent exactement à celles caractérisées avec les modèles phénoménologiques précédents. Ainsi, si des contacts sans frottement ont lieu entre le rotor et le stator, à des vitesses de rotation se trouvant dans des plages stables d'après les modèles simples d'interaction mono-mode, le rotor flexible aubagé adoptera une configuration statique à contacts permanents avec le carter flexible. Par contre, à partir de la vitesse de divergence du carter, si des contacts à frottement négligeable ont lieu, le système sera instable et la prise en compte des non linéarités liées aux grands débattements du carter sera indispensable. D'une façon générale, il a été mis en évidence que tant que les fréquences du rotor sont éloignées de celles du carter, ces dernières étant le plus souvent inférieures aux premières, le système tendra vers des configurations statiques. Cependant, ceci est à nuancer en fonctions des non linéarités du carter considérées. Il se peut en effet que dans une plage de vitesses de rotation proche de la vitesse critique du carter, des régimes dynamiques soient obtenus. Pour des vitesses de rotation plus élevées, telles que les fréquences du rotor soient proches de celles du carter, l'occurrence de contacts entre ces deux structures, suite par exemple à un choc, se traduit par des régimes dynamiques avec des contacts alternés sur toutes les aubes qui perdurent dans le temps et où l'arbre décrit une orbite rétrograde même en l'absence de frottement. Tous les cas de régimes dynamiques obtenus présentent une fréquence indéterminée a priori, ce qui limite les méthodes non linéaires applicables qui permettent de s'affranchir du régime transitoire du système. De plus, l'alternance rapide des contacts rend les estimations des gradients délicates et rend par extension les méthodes de shooting peu efficaces.

Enfin, nous avons mis en évidence l'effet du frottement sur le comportement de ces structures flexibles. Il s'avère que la flexion de l'arbre et l'élasticité du carter ainsi que celles des aubes rend le comportement du système, en cas de contacts frottants, chaotique. Il existe néanmoins un coefficient de frottement en dessous duquel le système adopte un régime vibratoire, toujours chaotique, mais autour de la position qu'il aurait sans frottement. Au dessus de ce coefficient, le comportement du système est également chaotique mais en plus, des amplitudes élevées apparaissent. De plus, il semble que plus les aubes soient souples, plus l'apparition de ces grandes amplitudes se fasse tôt.

## Perspectives

Au cours de cette thèse, le besoin de méthodes capables de déterminer à la fois les amplitudes et la fréquence de réponse d'un système périodique, dans le cas précis de structures subissant des contacts violents intermittents, s'est fait sentir. Il serait donc judicieux et utile de mettre au point des méthodes non linéaires, telle la méthode de shooting, mais qui soient peu sensibles à l'alternance rapide des forces de contact, contrairement à cette dernière.

L'influence de certains paramètres comme le jeu initial, sur la dynamique du système, n'a

pas été étudiée et pourrait être intéressante.

Enfin, les principales perspectives résident dans l'amélioration du modèle. Tout d'abord, la gravité pourrait être incluse dans celui-ci afin de déterminer son influence sur le comportement du système en cas de contacts. D'autres phénomènes physiques pourraient également être introduits comme par exemple les forces aérodynamiques qui permettraient de simuler le tip clearance. De même, le désaccordage naturel des aubes peut avoir une répercussion sur les fréquences du système ainsi que sur les prises de contacts si les longueurs des aubes sont différentes.

Il serait très intéressant de modéliser les aubes par des poutres courbes c'est-à-dire par des poutres dont la flexion et la traction/compression sont liées. Ceci permettrait d'avoir une répercussion de la flexion des aubes sur la longueur de leur fibre neutre et donc, d'avoir des modes de disque aubagé possédant une circonférence non circulaire. Cette conséquence paraît indispensable pour avoir une adéquation entre les déformées du disque et celles du carter afin que ce dernier embrasse entièrement le rotor. Dans le modèle développé au chapitre 6, l'angle incidence de l'aube sur le carter, résultant de sa flexion, n'a pas été pris en compte et pourrait générer des comportements plus violents du système. Il pourrait également être envisageable de prendre en compte les modes de torsion des aubes qui pourraient alors générer des phénomènes de couplage.

Pour terminer, un point fondamental dans le processus de contact entre le rotor et le stator d'un turboréacteur réside dans la modélisation locale de l'interaction entre l'aube et le carter. Il faudrait prendre en compte la raideur du matériau abradable recouvrant le carter ainsi que son usure, puisque celle-ci fait à son tour varier sa rigidité. Les écoulements fluides dans les zones du carter usinées s'en trouvent également modifiés et peuvent jouer un rôle sur la stabilité du système. Il pourrait ainsi s'avérer utile de modéliser la variation de la géométrie interne du carter au fur et à mesure de l'évolution des contacts, comme c'est le cas dans le domaine de la modélisation de l'usinage où les équations de retard font apparaître des phénomènes d'instabilité. Des lois de frottement plus complexes prenant en compte la vitesse de glissement et la température pourraient également avoir une incidence sur la stabilité du système en cas de contacts.



# Bibliographie

- [1] E.L. ALLGOWER, K. GEORG. *Introduction to Numerical Continuation Methods*. Springer, 2003.
- [2] R.F. BEATTY. Differentiating rotor response due to radial rubbing. *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, Vol. 107, pp. 151–160, 1985.
- [3] K.B. BLAIR, C.M. KROUSGRILL, T.N. FARRIS. Harmonic balance and continuation techniques in the dynamic analysis of duffings equation. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 202(5), pp. 717–731, 1997.
- [4] T.M. CAMERON, J.H. GRIFFIN. An alternating frequency/time domain method for calculating the steady-state response of nonlinear dynamic systems. *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 56, pp. 149–154, 1989.
- [5] S.V. CANCHI, R.G. PARKER. Parametric instability of a circular ring subjected to moving springs. *Journal of Sound and Vibration*, vol.293, pp. 360–379, 2006.
- [6] P. CHAMBRETTE, L. JEZEQUEL. Stability of a beam rubbed against a rotating disc. *European Journal of Mechanics, A/Solids*, vol.11, pp. 107–138, 1992.
- [7] D. CHILDS. *Turbomachinery Rotordynamics - Phenomena, Modeling, & Analysis*. John Wiley & Sons, Inc., 1993.
- [8] Y-S. CHOI, C-Y. BAE. Non linear dynamic analysis of partial rotor rub with experimental observations. Dans *ASME, Design Engineering Technical Conference*, Pittsburgh, PA, 2001.
- [9] Y.S. CHOI. Investigation on the whirling motion of full annular rotor rub. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 258(1), pp. 191–198, 2002.
- [10] Y.S. CHOI, S.T. NOAH. Mode-locking and chaos in a jeffcott rotor with bearing clearances. *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 61, pp. 131–138, 1994.
- [11] F.K. CHOY, J. PADOVAN. Non-linear transient analysis of rotor-casing rub events. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 113(3), pp. 529–545, 1987.
- [12] F. CHU, W. LU. Determination of the rubbing location in a multi-disk rotor system by means of dynamic stiffness identification. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 248(2), pp. 235–246, 2001.
- [13] F. CHU, Z. ZHANG. Bifurcation and chaos in a rub-impact jeffcott rotor system. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 210(1), pp. 1–18, 1998.
- [14] R.E. CHUPP, M.F. AKSIT, F. GHASRIPOOR, N.A. TURNQUIST, M. DEMIROGLU. Advanced seals for industrial turbine applications. *GE Research & Development Center*.

- [15] R.E. CHUPP, F. GHASRIPOOR, G.D. MOORE, L.S. KALV, J.R. JOHNSTON. Applying abradable seals to industrial gas turbines. *GE Research & Development Center*.
- [16] S.H. CRANDALL. *Rotordynamics*, in : W. Kliemann and N. S. Namachchivaya (Eds.), *Nonlinear Dynamics and Stochastic Mechanics*, pp. 1-44. CRC Press, Boca Raton, 1995.
- [17] D. DEMAILLY. *Étude du comportement non linéaire dans le domaine fréquentiel, Application à la dynamique des rotors*. Mémoire de thèse, École Centrale de Lyon, 2003.
- [18] M.P. den HARTOG. *Mechanical Vibration, 2nd Ed.* New York, 1940.
- [19] G. DUVAUT, J.L. LIONS. *Les inéquations en mécanique et en physique*. Dunod, 1972.
- [20] S. EDWARDS, A.W. LEES, M.I. FRISWELL. The influence of torsion on rotor/stator contact in rotating machinery. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 225(4), pp. 767–778, 1999.
- [21] F.F. EHRICH. The dynamic stability of rotor/stator radial rubs in rotating machinery. *Journal of Engineering for Industry*, Vol. 91(4), pp. 1025–1028, 1969.
- [22] F.F. EHRICH. *Shock and vibration handbook, 3d ed.* Macgraw-Hill, 1987.
- [23] F.F. EHRICH. *Handbook of rotordynamics*. Macgraw-Hill, 1992.
- [24] F.F. EHRICH. Rotor whirl forces induced by the tip clearance effect in axial flow compressors. *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 115, pp. 509–515, 1993.
- [25] F.F. EHRICH, J.J. O’CONNOR. Stator whirl with rotors bearing clearance. *Journal of Engineering for Industry*, 89, pp. 381–390, 1967.
- [26] Z.C. FENG, X-Z. ZHANG. Rubbing phenomena in rotor-stator contact. *Chaos Solitons & Fractals*, Vol. 14, pp. 257–267, 2002.
- [27] J.M. FERRARD. *Maths et Maple*. Dunod, 1998.
- [28] V. GALLARDO, C. LAWRENCE. Turbine engine stability/instability with rub forces. *NASA/TM*, 212974, 2004.
- [29] L. GAUL, N. WAGNER. Eigenpath dynamics of non-conservative mechanical systems such as disc brakes. Dans *IMAC XXII*, Dearborn, Michigan, 2004.
- [30] T. GMÜR. *Dynamique des structures*. Presses Polytechniques et universitaires romandes, 1997.
- [31] P. GOLDMAN, A. MUSZYNSKA. Chaotic behaviour of rotor/stator systems with rubs. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, Vol. 116, pp. 692–701, 1994.
- [32] P. GOLDMAN, A. MUSZYNSKA. Dynamic effects in mechanical structures with gaps and impacting : order and chaos. *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 116, pp. 541–547, 1994.
- [33] P. GOLDMAN, A. MUSZYNSKA. Rotor-to-stator, rub-related, thermal/mechanical effects in rotating machinery. *Chaos Solitons & Fractals*, Vol. 5(9), pp. 1579–1601, 1995.
- [34] Karl F. GRAFF. *Wave Motion in Elastic Solids*. Dover Publications, Inc., New York, 1991.
- [35] M. GÉRADIN, D. RIXEN. *Théorie des vibrations, application à la dynamique des structures*. Masson, 1993.
- [36] R.A. IBRAHIM. Friction-induced vibration, chatter, squeal, and chaos. part 1 : Mechanics of contact and friction. *ASME Design Engineering Technical Conferences*, Vol. 47(7), pp. 209–226, 1994.

- [37] R.A. IBRAHIM. Friction-induced vibration, chatter, squeal, and chaos. part 2 : Dynamics and modeling. *ASME Design Engineering Technical Conferences*, Vol. 47(7), pp. 227–253, 1994.
- [38] R.A. IBRAHIM. Friction-induced vibration, chatter, squeal and chaos, part i : Mechanics of contact and friction. *ASME Applied Mechanics Reviews*, vol. 47(7), pp. 209–226, 1994.
- [39] R.A. IBRAHIM. Friction-induced vibration, chatter, squeal and chaos, part ii : Modeling and dynamics. *ASME Applied Mechanics Reviews*, vol. 47(7), pp. 227–253, 1994.
- [40] W.D. IWAN, T.L. MOELLER. The stability of a spinning elastic disk with a transverse load system. *Journal of Applied Mecahnics*, vol.43, pp. 485–490, 1976.
- [41] W.D. IWAN, K.J. STAHL. The response of an elastic disk with a moving mass system. *Journal of Applied Mecahnics*, vol.40, pp. 445–451, 1973.
- [42] A.N. JEAN, H.D. NELSON. Periodic response investigation of large order nonlinear rotordynamic systems using collocation. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 143(3), pp. 473–489, 1990.
- [43] H.H. JEFFCOTT. The lateral vibration loaded shafts in the neighborhood of a whirling speed. *Philosophical Magazine*, vol. 6(37), pp. 304–314, 1919.
- [44] D.A. Haessig JR., B. FRIEDLAND. On the modeling and simulation of friction. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. 113, pp. 354–361, 1991.
- [45] E.V. KARPENKO, M. WIERCIGROCH, M.P. CARTMELL. Regular and chaotic dynamics of a discontinuously nonlinear rotor system. *Chaos Solitons and Fractals*, Vol. 13, pp. 1231–1242, 2002.
- [46] H.S. KIM, M. CHO, S.J. SONG. Stability analysis of a turbine rotor system with alford forces. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 258(4), pp. 777–790, 2002.
- [47] Y.B. KIM, S.T. NOAH. Quasi-periodic response and stability analysis for a non-linear jeffcott rotor. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 190(2), pp. 239–253, 1996.
- [48] Y.A. KUZNETSOV. *Elements of Applied Bifurcation Theory*. Springer, 2004.
- [49] M. LALANNE, G. FERRARIS. *Rotordynamics prediction in engineering*. John Wiley & Sons, 1990.
- [50] F. LAMNABHI-LAGARRIGUE. *Analyse des systèmes non linéaires*. Hermès, 1994.
- [51] M. LEGRAND. *Modèles de prédiction de l'interaction rotor/stator dans un moteur d'avion*. Mémoire de thèse, École Centrale de Nantes, Université de Nantes, 2005.
- [52] A.W. LEISSA. On a curve veering aberration. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, vol. 25, pp. 99–111, 1974.
- [53] N. LESAFFRE, J-J. SINOU, F. THOUVEREZ. Stability analysis of rotating beams rubbing on an elastic circular structure. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 299, pp. 1005–10032, 2007.
- [54] D.G. LEUENBERGER. *Linear and nonlinear programming*. Addison-Wesley, Reading, Mass., second edition, 1984.
- [55] A.Y.T. LEUNG, S.K. CHUI. Non-linear vibration of coupled duffing oscillators by an improved incremental harmonic balance method. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 181(4), pp. 619–633, 1995.



- [56] D. LI, J. XU. A method to determine the periodic solution of the non-linear dynamics system. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 275(2004), pp. 1–16, 2004.
- [57] A. LINGENER. Experimental investigation of reverse whirl of a flexible rotor. Dans *Third international conference on rotordynamics*, Edition du CNRS, Lyon, France, 1990.
- [58] A.E.H. LOVE. *A Treatise on The Mathematical Theory of Elasticity*. New York Dover Publications, 1944.
- [59] Y. MAOZHONG, H. BAIYUN, H. JIAWEN. Erosion wear behaviour and model of abradable seal coating. *Wear*, Vol. 252, pp. 9–15, 2002.
- [60] M. MEDVÈD. *Fundamentals of Dynamical Systems and Bifurcation Theory*. Adam Hilger, New York, 1992.
- [61] A. MOLINARI, Y. ESTRIN, S. MERCIER. Dependence of the coefficient of friction on the sliding conditions in the high velocity range. *Journal of Tribology*, vol. 121, pp. 35–41, 1999.
- [62] C.D. MOTE. Stability of circular plates subjected to moving loads. *Journal of Franklin Institute*, vol.290, pp. 329–344, 1970.
- [63] C.D. MOTE. Moving load stability of a circular plate on a floating central collar. *Journal of the Acoustical Society of America*, vol.61, pp. 439–447, 1977.
- [64] A. MOUFKI, D. DUDZINSKI, A. MOLINARI, M. RAUSCH. Thermoviscoplastic modelling of oblique cutting forces and chip flow predictions. *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 42, pp. 1205–1232, 2000.
- [65] A. MOUFKI, A. MOLINARI, D. DUDZINSKI. Modelling of orthogonal cutting with a temperature dependent friction law. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 46(10), pp. 2103–2138, 1998.
- [66] A. MUSZYNSKA, P. GOLDMAN. Chaotic response of unbalanced rotor/bearing/stator systems with looseness or rubs. *Chaos Solitons & Fractals*, Vol. 5(9), pp. 1683–1704, 1995.
- [67] S. NARAYANAN, P. SEKAR. A frequency domain based numeric-analytical method for non-linear dynamical systems. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 211(3), pp. 409–424, 1998.
- [68] A.H. NAYFEH, B. BALACHANDRAN. *Applied nonlinear dynamics*. John Wiley & Sons, 1995.
- [69] A.H. NAYFEH, D.T. MOOK. *Nonlinear oscillations*. John Wiley & Sons, 1979.
- [70] F.C. NELSON. A brief history of early rotor dynamics. *Sound and Vibration*, June 2003.
- [71] J.T. ODEN, J.A.C MARTINS. Models and computational methods for dynamic friction phenomena. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 52, pp. 527–634, 1985.
- [72] W. OSTACHOWICZ. The harmonic balance method for determining the vibration parameters in damped dynamic systems. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 131(3), pp. 465–473, 1989.
- [73] H. OUYANG, J.E. MOTTERSHAED, M.P. CARTMELL, M.I. FRISWELL. Friction -induced parametric resonances in discs/ effects of a negative friction-velocity relationship. *Journal of Sound and Vibration*, vol.209, pp. 251–264, 1998.

- 
- [74] C. PADMANABHAN, R. SINGH. Analysis of periodically excited non-linear systems by a parametric continuation technique. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 184(1), pp. 35–58, 1995.
- [75] C. PIERRE. Mode localization and eigenvalue loci veering phenomena in disordered structures. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 126(3), pp. 485–502, 1988.
- [76] C. PIERRE, E.H. DOWELL. A study of dynamic instability of plates by an extended incremental harmonic balance method. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 52, pp. 993–997, 1985.
- [77] C. PIERRE, A.A. FERRI, E.H. DOWELL. Multi-harmonic analysis of dry friction damped systems using an incremental harmonic balance method. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 56, pp. 958–964, 1985.
- [78] W. QIN, G. CHEN, G. MENG. Nonlinear responses of a rub-impact overhung rotor. *Chaos Solitons and Fractals*, Vol. 19, pp. 1161–1172, 2004.
- [79] A. RAGHOTHAMA, S. NARAYANAN. Non-linear dynamics of a two-dimensional airfoil by incremental harmonic balance method. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 226(3), pp. 493–517, 1999.
- [80] P. SCHMIECHEN. *Travelling Wave Speed Coincidence*. Mémoire de thèse, Imperial College of Science, Technology & Medicine, University of London, 1997.
- [81] S.K. SINHA. Dynamic characteristics of a flexible bladed-rotor with coulomb damping due to tip-rub. *Journal of Sound and Vibration*, vol.273, pp. 875–919, 2004.
- [82] Sunil K. SINHA. Non-linear dynamic response of a rotating radial timoshenko beam with periodic pulse loading at the free-end. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 40, pp. 113–149, 2005.
- [83] J-J. SINOUE, A.W. LEES. The influence of cracks in rotating shafts. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 285(4-5), pp. 1015–1037, 2005.
- [84] S.J. SONG, M. MARTINEZ-SANCHEZ. Rotordynamic forces due to turbine tip leakage : part i- blade scale effects. *Journal of Turbomachinery*, Vol. 119, pp. 695–703, 1997.
- [85] S.J. SONG, M. MARTINEZ-SANCHEZ. Rotordynamic forces due to turbine tip leakage : part ii- radius scale effects and experimental verification. *Journal of Turbomachinery*, Vol. 119, pp. 704–713, 1997.
- [86] D. SPORER, Westaim NEOMET, TANNHEIM. Composite particle powders - manufacture and applications. *GE Research & Development Center*.
- [87] B.C. STAPLES. Excitation of travelling wave response in axi-symmetric structures. Dans *15th International seminar on modal analysis*, Leuven, Belgium, 1990.
- [88] Z. SUN, J. XU, T. ZHOU. Analysis on complicated characteristics of high-speed rotor system with rub-impact. *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 37, pp. 659–672, 2002.
- [89] P. SUNDARARAJAN, S. NOAH. An algorithm for response and stability of large order non-linear systems - application to rotor systems. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 214(4), pp. 695–723, 1998.
- [90] TIMOSHENKO, GERE. *Theory of elastic stability*. McGraw-Hill international editions, 1986.

- 
- [91] G. von GROLL, D.J. EWINS. The harmonic balance method with arc-length continuation in rotor/stator contact problems. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 241(2), pp. 223–233, 2001.
  - [92] H. WANG. Criteria for analysis of abradable coatings. *Surface & Coatings Technology*, Vol. 79, pp. 71–75, 1996.
  - [93] Y. WANG, Z. WANG. Periodic response of piecewise-linear oscillators using trigonometric collocation. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 177(4), pp. 573–576, 1994.
  - [94] S.J. WILDHEIM. Excitation of rotationally periodic structures. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 46, pp. 878–882, 1979.
  - [95] P. WRIGGERS. *Computational contact mechanics, second edition*. Springer, 2006.
  - [96] Z. WU, Y. CHEN. Prediction for the rub-impact phenomena in rotor systems. Dans *ASME, Design Engineering Technical Conference*, Pittsburgh, PA, 2001.
  - [97] Y.M. XIE. An assessment of time integration schemes for non-linear dynamic equations. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 192(1), pp. 321–331, 1996.
  - [98] W-M. ZHANG, G. MENG. Stability, bifurcation and chaos of a high-speed rub-impact rotor system in mems. *Sensors and actuators A*, Vol. 127(1), pp. 163–178, 2006.

**Publications personnelles**

- [1] N. LESAFFRE, J-J. SINOUE, F. THOUVEREZ. Stability Analysis of a Flexible Blade-Rotor. *Key Engineering Materials*, Vol. 293-294, pp. 409-416, 2005.
- [2] N. LESAFFRE, J-J. SINOUE, F. THOUVEREZ. Model and Stability Analysis of a Flexible Bladed Rotor. *International Journal of Rotating Machinery*, Article ID 63756, 16 pages, 2006.
- [3] N. LESAFFRE, J-J. SINOUE, F. THOUVEREZ. Stability Analysis of Rotating Beams Rubbing on an Elastic Circular Structure. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 299, pp. 1005-1032, 2007.
- [4] N. LESAFFRE, J-J. SINOUE, F. THOUVEREZ. Contact Analysis of a Flexible Bladed-Rotor. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, Vol. 26, pp. 541-557, 2007.

**Communications personnelles internationales avec comité de lecture**

- [5] N. LESAFFRE, J-J. SINOUE, F. THOUVEREZ. Stability Analysis of Beams Rotating on an Elastic Ring - Application to Turbo machinery Rotor-Stator Contacts. Dans *14th International Conference on Computational & Experimental Engineering and Sciences*, Miami Beach, USA, January 3-8, 2007.
- [6] N. LESAFFRE, J-J. SINOUE, F. THOUVEREZ. Stability and Contact Analysis of a Flexible Bladed-Rotor. Dans *ASME, 20th Biennial Conference on Mechanical Vibration and Noise, DETC2005/VIB-84505*, Long Beach, California, USA, September 24-28, 2005.
- [7] N. LESAFFRE, J-J. SINOUE, F. THOUVEREZ. Stability Analysis of a Flexible Bladed-Rotor. Dans *DAMAS, 6th International Conference on Damage Assessment of Structures*, Gdansk, Poland, July 4-6, 2005.

**Communications personnelles nationales avec comité de lecture**

- [8] N. LESAFFRE, J-J. SINOUE, F. THOUVEREZ. Modélisation et analyse de stabilité d'un rotor flexible aubagé. Dans *7ème Colloque National en Calcul des Structures*, Giens, France, 20-23 Mai 2005.



# Table des figures

1.1	Exemple d'un turboréacteur CFM56-7 . . . . .	6
1.2	Coupe schématique d'un turboréacteur . . . . .	7
1.3	Configuration de référence d'un système continu . . . . .	8
1.4	Configuration déformée d'un système continu . . . . .	9
1.5	Diagramme de Campbell d'un rotor axisymétrique dans le repère fixe . . . . .	16
1.6	Diagramme de Campbell, dans le repère fixe, d'un rotor possédant des parties fixes dissymétriques . . . . .	16
1.7	Exemple de système tournant . . . . .	18
1.8	Diagramme de Campbell d'un rotor isotrope dans le repère tournant . . . . .	20
2.1	Deux corps déformables en contact . . . . .	26
2.2	Loi de contact unilatéral . . . . .	27
2.3	Loi de frottement de Coulomb . . . . .	28
3.1	Stabilité de l'algorithme de Newmark . . . . .	46
3.2	Exemple de retournement d'un système non linéaire . . . . .	56
3.3	Méthode de continuation de type arc-length . . . . .	58
3.4	Méthode de continuation de type pseudo arc-length . . . . .	59
3.5	Méthode de continuation avec paramétrisation sélective . . . . .	60
3.6	Prédicteur de type sécante . . . . .	61
3.7	Prédicteur de type tangente . . . . .	63
3.8	Modèle de rotor et de stator [17] . . . . .	68
3.9	Intégration temporelle du système de Demailly [17], à $\Omega = 1272$ tr/min, avec une méthode de différences finies centrées couplée à des multiplicateurs de Lagrange, avec deux pas de temps différents . . . . .	72
3.10	Comparaison des résultats de Demailly [17] (a) orbite du rotor, (c) orbite du stator, avec ceux obtenus par la méthode choisie au cours de cette étude (b) orbite du rotor, (d) orbite du stator . . . . .	73
3.11	Comparaison (a) des évolution des jeux entre les deux structures du modèle de Demailly [17] et de celles obtenus par la procédure choisie au cours de cette étude, (b) du spectre fréquentiel associé aux jeux . . . . .	74
3.12	Comparaison des résultats obtenus par balance harmonique avec 3 harmoniques et ceux obtenus par intégration temporelle directe au niveau de l'orbite du rotor (a), de l'orbite du stator (b) et de l'évolution des jeux (c) . . . . .	75

3.13	Comparaison des résultats obtenus par balance harmonique et ceux obtenus par intégration temporelle directe au niveau (a) de l'orbite du stator avec 5 harmoniques, (b) de l'évolution des jeux avec 5 harmoniques, (c) de l'orbite du stator avec 20 harmoniques et (d), de l'évolution des jeux avec 20 harmoniques	76
3.14	Comparaison des résultats obtenus par shooting, à période fixée, et ceux obtenus par intégration temporelle directe au niveau (a) de l'orbite su stator, (b) de l'évolution des jeux, (c) évolution des forces et (d), évolution du gradient d'une des forces	78
3.15	Comparaison des résultats obtenus par shooting et ceux obtenus par intégration temporelle directe au niveau (a) de l'orbite su stator, (b) de l'évolution des jeux	79
3.16	Comparaison des résultats obtenus par shooting multiple et ceux obtenus par intégration temporelle directe au niveau (a) de l'orbite su stator, (b) de l'évolution des jeux	79
4.1	Bifurcations d'un point fixe	87
4.2	Bifurcations d'un point fixe - suite	88
4.3	Bifurcation catastrophique dangereuse	89
4.4	Sections de Poincaré d'orbites périodiques	94
4.5	Section de Poincaré d'une orbite $\Gamma$ et une trajectoire adjacente	96
4.6	Scénarios selon lesquels les multiplicateurs de Floquet peuvent quitter le cercle unité engendrant différentes bifurcations locales	97
4.7	Bifurcations de type « symmetry-breaking »	98
4.8	Bifurcation de type « cyclic-fold »	99
4.9	Deux possibilités de bifurcations transcritiques	100
5.1	Modèle d'anneau élastique excité par une poutre rotative frottant sur sa face interne	108
5.2	Modèle d'anneau élastique excité par un système masse-ressort à un degré de liberté sans frottement	112
5.3	Analyse de stabilité du mode à trois diamètres nodaux du stator excité par un système masse-ressort radial tournant avec $m_r = 10kg$ et $k_r = 1.10^6 N.m^{-1}$	113
5.4	Évolution de $\Omega_c$ et $\Omega_{c_2}$ en fonction de la masse modale et de la raideur modale en traction/compression d'une aube	115
5.5	Évolution de $\Omega_{mc}$ en fonction de la masse modale et de la raideur modale en traction/compression d'une aube	116
5.6	Analyse de stabilité du mode à trois diamètres nodaux du stator excité par une poutre radiale tournante avec $m_r < 2M_{stat}$ , (a) $\omega_r = 3019,75 \text{ tr/min} > 304,08 \text{ tr/min} = \Omega_c$ , (b) $\omega_r = 3549,29 \text{ tr/min} > \Omega_c$ , (c) $\omega_r = 301,97 \text{ tr/min} < \Omega_c$ , (d) $\omega_r = 95,49 \text{ tr/min} < \Omega_c$	117
5.7	Analyse de stabilité du mode à trois diamètres nodaux du stator excité par un système masse-ressort radial tournant avec $m_r = 2000kg$ ( $m_r > 2M_{stat}$ ) et $k_r = 1.10^6 N.m^{-1}$	118
5.8	Analyse de stabilité du mode à deux diamètres nodaux du stator excité par (a) une charge radiale rotative (b) deux charges radiales rotatives, (c) et (d) trois charges radiales rotatives	120

5.9	Evolution de la norme du déplacement du mode à trois diamètres nodaux de l'anneau en un point, en fonction du temps, à : (a) $\Omega = 286,5$ tr/min et (b) $\Omega = 668,5$ tr/min . . . . .	122
5.10	Déplacements du mode à trois diamètres nodaux de l'anneau excité par (a) trois aubes espacées de $60^\circ$ , (b) trois aubes distantes de $120^\circ$ et (c) deux aubes distantes de $60^\circ$ , tournant à $\Omega = 286,5$ tr/min . . . . .	123
5.11	Evolution de la norme du déplacement du mode à trois diamètres nodaux de l'anneau en un point, en fonction du temps, à : (a) $\Omega = 310$ tr/min et (b), $\Omega = 4774,5$ tr/min . . . . .	124
5.12	Modèle d'anneau élastique non linéaire . . . . .	124
5.13	Réponse de l'anneau élastique non linéaire excité par une poutre en rotation . . . . .	125
5.14	Evolution de la norme du déplacement du mode à trois diamètres nodaux de l'anneau non linéaire en un point, en fonction du temps, à (a) $\Omega = 310$ tr/min et (b) $\Omega = 4774,5$ tr/min . . . . .	125
5.15	(a) Comportement du système non linéaire à $\Omega = 4774,5$ tr/min et $\Omega = 5729,5$ tr/min obtenu par intégration directe et par shooting, (b) évolution des fréquences du système en fonction de $\Omega$ , obtenue par intégration directe et par shooting . . . . .	127
5.16	Comportement du système non linéaire à $\Omega = 4774,5$ tr/min et $\Omega = 5729,5$ tr/min obtenu par intégration directe et (a) par HBM, (b) par 2SHBM . . . . .	128
5.17	Analyse de stabilité du mode à trois diamètres nodaux du stator excité par une raideur pure rotative $k_r = 1.10^6$ N.m <sup>-1</sup> avec (a) $\mu = 0.01$ ((b) étant un zoom sur les parties réelles) et (c) $\mu = 0.1$ ((d) étant un zoom sur les parties réelles) . . . . .	133
5.18	Analyse de stabilité du mode à trois diamètres nodaux du stator excité par une masse pure rotative $m_r = 100$ kg avec (a) $\mu = 0.01$ ((b) étant un zoom sur les parties réelles) et (c) $\mu = 0.1$ ((d) étant un zoom sur les parties réelles) . . . . .	134
5.19	Analyse de stabilité du mode à trois diamètres nodaux du stator excité par une aube rotative ne possédant qu'un degré de liberté de traction/compression avec $\mu = 0.01$ et (a) $\omega_r > \omega_n$ ((b) étant un zoom sur les parties réelles) et (c) $\omega_r < \omega_n$ ((d) étant un zoom sur les parties réelles) . . . . .	135
5.20	(a) Analyse de stabilité du mode à trois diamètres nodaux du stator excité par une aube rotative ne possédant qu'un degré de liberté de traction/compression avec $\mu = 0.1$ et $\omega_r > \omega_n$ , (b) étant un zoom sur les parties réelles . . . . .	136
5.21	Modèle d'anneau élastique excité par une poutre ne possédant qu'un degré de liberté de flexion . . . . .	136
5.22	Analyse de stabilité du mode à trois diamètres nodaux du stator excité par une aube rotative ayant un degré de liberté de flexion, avec (a) $\mu = 0.01$ et (b) $\mu = 0.1$ . . . . .	137
5.23	(a) Analyse de stabilité du mode à trois diamètres nodaux du stator excité par une aube rotative ayant deux degrés de liberté avec $k_r = k_t = 1.10^6$ N.m <sup>-1</sup> et $\mu = 0.1$ , (b) zoom sur les parties réelles, (c) zoom de (a) . . . . .	138
5.24	Analyse de stabilité du mode à trois diamètres nodaux du stator excité par une aube rotative ayant deux degrés de liberté avec $\mu = 0.1$ et (a) $k_r = 1.10^7$ N.m <sup>-1</sup> , $k_t = 1.10^6$ N.m <sup>-1</sup> , (b) $k_r = 1.10^6$ N.m <sup>-1</sup> , $k_t = 1.10^7$ N.m <sup>-1</sup> . . . . .	139



5.25	Analyse de stabilité du mode à trois diamètres nodaux du stator excité par deux aubes identiques ayant deux degrés de liberté avec $\mu = 0.1$ et (a) à $90^\circ$ l'une de l'autre, (b) diamétralement opposées . . . . .	140
5.26	Zones de couplage d'une aube avec une seconde située à $60^\circ$ dans le repère tournant et frottant sur (a) le mode à deux diamètres nodaux de l'anneau, (b) le mode à trois diamètres nodaux de l'anneau, avec $\mu = 0.1$ . . . . .	141
5.27	Couplage entre deux aubes identiques frottant sur le mode à trois diamètres nodaux de l'anneau avec $\mu = 0.1$ , l'une étant à $60^\circ$ et l'autre, à $145^\circ$ dans le repère tournant . . . . .	141
5.28	Analyse de stabilité du mode à trois diamètres nodaux du stator excité par deux aubes de paramètres modaux différents ayant deux degrés de liberté, distantes de $60^\circ$ et avec $\mu = 0.1$ . . . . .	143
5.29	Angle d'incidence de l'aube sur le carter . . . . .	143
5.32	Diagramme de Campbell du mode à trois diamètres nodaux d'un anneau (30 Hz) excité par une aube dont le mode de flexion est à 20 Hz, le mode de traction/compression à 70 Hz, en fonction de $\alpha$ - évolution de $\Omega_{mc}$ . . . . .	145
5.30	Analyse de stabilité du mode à trois diamètres nodaux du stator (30 Hz) excité par une aube rotative avec $\mu = 0.01$ et à (a) $\alpha = 0^\circ$ , (b) $\alpha = 5^\circ$ , (c) $\alpha = 10^\circ$ , (d) $\alpha = 89^\circ$ . . . . .	146
5.33	Zoom sur la figure 5.32 . . . . .	146
5.31	Agrandissements de la figure 5.30 . . . . .	147
5.34	Analyse de stabilité du mode à trois diamètres nodaux du stator, amorti ou non, excité par une aube rotative ayant deux degrés de liberté avec $k_r = k_t = 1.10^6 \text{ N.m}^{-1}$ et différents coefficients de frottement . . . . .	149
5.35	(a) Comportement dynamique du mode à trois diamètres nodaux de l'anneau associé à la figure 5.34 à $\Omega = 286,5 \text{ tr/min}$ avec $\mu = 1.8$ , (b) déplacements tangents de l'aube, (c) évolution des vitesses tangentes de l'aube et du carter, (d) évolution de la première composante des forces associées au système et (e) gradient de cette composante . . . . .	150
5.36	(a) Comportement dynamique du mode à trois diamètres nodaux de l'anneau associé à la figure 5.34 à $\Omega = 286,5 \text{ tr/min}$ avec $\mu = 0.4$ , (b) déplacements tangents de l'aube . . . . .	151
5.37	Comportement dynamique du mode à trois diamètres nodaux de l'anneau associé à la figure 5.34(c) à $\Omega = 1215 \text{ tr/min}$ (a) sans non linéarités, (b) avec $k_{NL} = 1.10^5 \text{ N.m}^{-1}$ . . . . .	151
5.38	Comportement dynamique du mode à trois diamètres nodaux du carter linéaire excité par une aube ayant un degré de liberté de traction/compression, glissant sans frottement à (a) $\Omega = 286,5 \text{ tr/min}$ et (b) $\Omega = 668,5 \text{ tr/min}$ . . . . .	155
5.39	Déplacement radial du mode à trois diamètres nodaux du carter linéaire excité par une aube ayant un degré de liberté de traction/compression, glissant sans frottement à (a) $\Omega = 310 \text{ tr/min}$ , (b) $\Omega = 4774,5 \text{ tr/min}$ , (c) évolution des jeux entre l'aube et le carter à $\Omega = 310 \text{ tr/min}$ et (d), à $\Omega = 4774,5 \text{ tr/min}$ . . . . .	156

5.40	Déplacement radial du mode à trois diamètres nodaux du carter non linéaire avec $k_{NL} = 1.10^5 \text{ N.m}^{-1}$ excité par une aube ayant un degré de liberté de traction/compression, glissant sans frottement à (a) $\Omega = 310 \text{ tr/min}$ , (b) $\Omega = 4774,5 \text{ tr/min}$ . . . . .	157
5.41	(a) Déplacement radial du mode à trois diamètres nodaux du carter non linéaire avec $k_{NL} = 1.10^7 \text{ N.m}^{-1}$ excité par une aube ayant un degré de liberté de traction/compression, glissant sans frottement à (a) $\Omega = 4774,5 \text{ tr/min}$ , (b) évolution des jeux entre les deux structures . . . . .	158
5.42	(a) Déplacement radial du mode à trois diamètres nodaux du carter linéaire conservatif excité par une aube ayant un degré de liberté de traction/compression, glissant sans frottement à (a) $\Omega = 668,5,5 \text{ tr/min}$ , (b) spectre du signal . . . .	159
5.43	Evolution des degrés de liberté d'un système constitué d'un anneau élastique linéaire dont le troisième mode est excité par une aube de mêmes paramètres modaux en traction/compression et en flexion, tournant à $\Omega = 286,5 \text{ tr/min}$ et avec $\mu = 1.8$ . . . . .	159
6.1	Modèle de rotor flexible aubagé . . . . .	162
6.2	Vue de face du disque aubagé . . . . .	163
6.3	(a) Diagramme de Campbell (b) plan complexe pour un rotor ayant 28 aubes de longueur 1m . . . . .	165
6.4	Diagramme de Campbell pour un rotor ayant 2 aubes diamétralement opposées	166
6.5	(a) Plan complexe (b) parties réelles pour un rotor ayant 2 aubes diamétralement opposées . . . . .	167
6.6	(a) Carte de stabilité (b) fréquences instables associées, pour un rotor ayant deux aubes flexibles diamétralement opposées en fonction de leur longueur et de la vitesse de rotation . . . . .	168
6.7	(a) Carte de stabilité (b) fréquences instables associées, pour un rotor ayant deux aubes rigides diamétralement opposées en fonction de leur longueur et de la vitesse de rotation . . . . .	168
6.8	Vue de dessus du rotor, angle de calage des aubes $\beta$ . . . . .	169
6.9	(a) Carte de stabilité (b) fréquences instables associées, pour un rotor ayant deux aubes flexibles diamétralement opposées en fonction de leur angle de calage et de la vitesse de rotation . . . . .	169
6.10	(a) Diagramme de Campbell d'un rotor à 6 aubes ayant uniquement un amortissement interne visqueux au niveau de l'arbre de coefficient $\eta_s = 2.5.10^{-5}$ , (b) plan complexe associé . . . . .	170
6.11	Réponse à balourd d'un rotor à 6 aubes, (a) selon l'axe X, (b) selon l'axe Y, dans le repère tournant, pour un balourd de 500 g.cm situé à $45^\circ$ dans ce repère	171
6.12	(a) Numérotation des aubes (b) évolution des jeux entre les aubes et le carter rigide . . . . .	174
6.13	(a) Comportement dynamique (b) déformée associée à un rotor à 6 aubes en contact avec un stator rigide à 5730 tr/min, dans le repère tournant . . . . .	174
6.14	(a) Diagramme de Campbell (b) parties réelles des valeurs propres associées, pour un rotor à 6 aubes en contact sur une d'entre elles avec un stator rigide .	175
6.15	Diagramme de Campbell pour le stator flexible décrit dans le repère tournant .	176

6.16 (a) Evolution des jeux entre les aubes et le stator flexible (b) zoom . . . . .	177
6.17 Position d'équilibre statique du système à 164 tr/min (déplacements amplifiés) . . . . .	177
6.18 (a) Diagramme de Campbell (b) parties réelles associées, pour un stator flexible en contact avec le rotor sur les aubes 1, 2, 5 et 6 . . . . .	178
6.19 Position d'équilibre statique du système à 286 tr/min (déplacements amplifiés) . . . . .	178
6.20 Position d'équilibre statique du système à 309,8 tr/min (déplacements amplifiés) . . . . .	179
6.21 (a) Diagramme de Campbell (b) parties réelles associées, pour un stator flexible en contact avec le rotor sur les aubes 1, 2, 3, 5 et 6 . . . . .	179
6.22 Synthèse des positions d'équilibre du système rotor/stator en contact . . . . .	180
6.23 Evolution des jeux entre les six aubes du rotor et le carter, en fonction du temps et à $\Omega = 382$ tr/min . . . . .	182
6.24 Comparaison des études de stabilité provenant du modèle phénoménologique d'anneau élastique excité par cinq aubes tournantes, (a) et (b) et celle provenant du modèle de rotor flexible aubagé en contact avec le carter sur cinq aubes, (c) et (d) . . . . .	183
6.25 Déplacements (a) de l'arbre, (b) du carter non linéaire avec $k_{NL} = 1.10^5 N.m^{-1}$ , (c) évolution des jeux entre les aubes et le carter, (d) orbite de l'arbre tournant à $\Omega = 310$ tr/min . . . . .	184
6.26 (a) Spectre fréquentiel des déplacements de l'arbre et du carter, (b) évolution des forces de contact dans le cas d'un carter non linéaire avec $k_{NL} = 1.10^5 N.m^{-1}$ et un arbre tournant à $\Omega = 310$ tr/min . . . . .	185
6.27 Déplacements (a) de l'arbre tournant à $\Omega = 310$ tr/min, (b) du carter non linéaire avec $k_{NL} = 1.10^5 N.m^{-1}$ , (c) spectres associés, obtenus par intégrations temporelles directes avec deux pas de temps différents, (d) comparaison des déplacements de l'arbre obtenus par intégration temporelle et par HBM . . . . .	186
6.28 Orbite de l'arbre animé d'une vitesse de rotation de (a) $\Omega = 311$ tr/min, (b) $\Omega = 315$ tr/min . . . . .	188
6.29 Spectre de la réponse du système à une vitesse de rotation $\Omega = 319$ tr/min . . . . .	189
6.30 Déplacements (a) de l'arbre, (b) du carter non linéaire avec $k_{NL} = 6.10^5 N.m^{-1}$ , (c) évolution des jeux entre les aubes et le carter, (d) orbite de l'arbre tournant à $\Omega = 363$ tr/min . . . . .	190
6.31 Spectre de la réponse du système à une vitesse de rotation $\Omega = 363$ tr/min et des raideurs cubiques $k_{NL} = 6.10^5 N.m^{-1}$ . . . . .	191
6.32 (a) Evolution des jeux entre les aubes du rotor tournant à $\Omega = 363$ tr/min et le carter non linéaire avec $k_{NL} = 1.10^{11} N.m^{-1}$ , (b) déformée associée (déplacements amplifiés) . . . . .	192
6.33 Déformée du système composé d'un carter non linéaire avec $k_{NL} = 1.10^{11} N.m^{-1}$ en contact avec un rotor flexible aubagé tournant à $\Omega = 382$ tr/min (déplacements amplifiés) . . . . .	192
6.34 Déplacements (a) de l'arbre tournant à $\Omega = 860$ tr/min, (b) du carter non linéaire avec $k_{NL} = 1.10^{11} N.m^{-1}$ , (c) évolution des jeux entre les aubes et le carter, (d) déformée du système (déplacements amplifiés) . . . . .	193
6.35 Superposition des diagrammes de Campbell d'un carter non linéaire avec $k_{NL} =$ $1.10^{11} N.m^{-1}$ et d'un disque aubagé dont les aubes sont couplées . . . . .	194

6.36	(a) Premier, (b) deuxième et (c) troisième mode de disque aubagé d'un rotor ayant des aubes couplées . . . . .	194
6.37	Déplacements (a) des aubes d'un arbre tournant à $\Omega = 1528$ tr/min, (b) du carter non linéaire avec $k_{NL} = 1.10^{11}$ N.m <sup>-1</sup> , (c) évolution des jeux entre les aubes et le carter, (d) spectre fréquentiel des déplacements, (e) déformée du système (déplacements amplifiés), (f) orbite de l'arbre . . . . .	195
6.38	Déplacements (a) d'une aube d'un arbre tournant à $\Omega = 1308$ tr/min, (b) du carter non linéaire avec $k_{NL} = 1.10^{11}$ N.m <sup>-1</sup> , (c) évolution des jeux entre les aubes et le carter, (d) déformée du système (déplacements amplifiés) . . . . .	196
6.39	Déplacements de l'arbre d'un rotor possédant 90 aubes rigides frottant contre un carter rigide avec (a) $\mu = 0.1$ et $\mu = 0.7$ , (b) $\mu = 1.5$ , (c) évolution des jeux entre les aubes et le carter, (d) orbite de l'arbre . . . . .	198
6.40	(a) Déplacements d'un arbre possédant un disque aubagé de 6 aubes rigides tournant à $\Omega = 286$ tr/min et frottant contre un carter possédant un seul mode avec $\mu = 1$ , (b) déplacements du carter, (c) évolution des jeux entre les aubes et le carter . . . . .	200
6.41	(a) Zoom de la figure 6.40(a), (b) zoom de la figure 6.40(b), (c) zoom de la figure 6.40(c), (d) évolution du multiplicateur de Lagrange $\lambda_{N_6}$ associé à l'aube 6201	
6.42	(a) Déplacements d'un arbre possédant un disque aubagé de 6 aubes rigides frottant contre un carter élastique avec $\mu = 0.4$ , (b) déplacements du carter, (c) évolution des jeux entre les aubes et le carter, (d) orbite de l'arbre . . . . .	202
6.43	Spectre fréquentiel du système associé à la figure 6.42 . . . . .	203
6.44	(a) Zoom sur l'orbite d'un arbre possédant un disque aubagé de 6 aubes rigides frottant contre un carter élastique avec $\mu = 1$ , (b) spectre fréquentiel associé . . . . .	203
6.45	(a) Déplacements d'un arbre possédant un disque aubagé de 6 aubes rigides frottant contre un carter élastique avec $\mu = 1.5$ , (b) déplacements du carter, (c) évolution des jeux entre les aubes et le carter, (d) spectre fréquentiel de la dynamique de l'arbre, (e) déformée du système (déplacements amplifiés) et (f), orbite de l'arbre . . . . .	204
6.46	Déplacements d'un arbre possédant un disque aubagé de 6 aubes flexibles de module d'Young (a) $E_b = 3,55.10^{13}$ Pa, (b) $E_b = 3,55.10^{11}$ Pa, frottant contre un carter élastique avec $\mu = 0.4$ . . . . .	205
6.47	(a) Flexion de 6 aubes en titane d'un arbre tournant à $\Omega = 1528$ tr/min, frottant contre un carter élastique non linéaire avec $k_{NL} = 1.10^{11}$ N.m <sup>-1</sup> et $\mu = \mathbf{0.1}$ , (b) déplacements du carter, (c) évolution des jeux entre les aubes et le carter suite à un choc, (d) déformée du système (déplacements amplifiés) . . . . .	206
6.48	(a) Flexion de 6 aubes en titane d'un arbre tournant à $\Omega = 1528$ tr/min, frottant contre un carter élastique non linéaire avec $k_{NL} = 1.10^{11}$ N.m <sup>-1</sup> et $\mu = \mathbf{0.3}$ , (b) déplacements du carter, (c) évolution des jeux entre les aubes et le carter suite à un choc, (d) déformée du système (déplacements amplifiés) . . . . .	207
6.49	(a) Flexion de 6 aubes en titane d'un arbre tournant à $\Omega = 1528$ tr/min, frottant contre un carter élastique non linéaire avec $k_{NL} = 1.10^{11}$ N.m <sup>-1</sup> et $\mu = \mathbf{0.4}$ , (b) déplacements du carter, (c) évolution des jeux entre les aubes et le carter suite à un choc, (d) déformée du système (déplacements amplifiés) . . . . .	208

- 6.50 Orbite d'un arbre possédant un disque aubagé de 6 aubes en titane, tournant à  $\Omega = 1528$  tr/min, frottant contre un carter élastique non linéaire avec  $k_{NL} = 1.10^{11}$   $N.m^{-1}$  et (a)  $\mu = 0.1$ , (c)  $\mu = 0.3$  et (e)  $\mu = 0.4$ , (b), (d) et (e) représentant les spectres fréquentiels de la dynamique du système associé . . . 209

# Liste des tableaux

3.1	Caractéristiques de quelques schémas d'intégration temporelle . . . . .	45
4.1	Valeurs propres de la matrice monodrome du système de Demailly [17] à $\Omega = 1272$ tr/min . . . . .	104
5.1	Valeurs propres de la matrice monodrome du système non linéaire à $\Omega = 5729,5$ tr/min . . . . .	126
5.2	Vitesses caractéristiques du couplage entre une aube située à $60^\circ$ dans le repère tournant et une seconde située entre $142^\circ$ et $158^\circ$ par l'intermédiaire du mode à trois diamètres nodaux le l'anneau . . . . .	142



# Nomenclature

$m_{tot}$	Nombre de modes considérés pour exprimer les déplacements de l'arbre
$n_{tot}$	Nombre de modes considérés pour exprimer la flexion des aubes
$N_{tot}$	nombre d'aubes
$M_D$	Masse du disque
$M_S$	Masse de l'arbre
$M_b$	Masse d'une aube
$D_L$	Épaisseur du disque rigide
$r$	Rayon du disque rigide
$L$	Longueur des aubes
$R = r + L$	Rayon du disque aubagé
$A_b$	Aire d'une section droite d'aube
$I_b$	Moment d'inertie diamétral d'une aube dans le sens de sa flexion
$I_y$	Moment d'inertie diamétral d'une aube dans la direction orthogonale à sa flexion
$I_z = I_b + I_y$	Moment d'inertie polaire d'une aube
$l$	Longueur de l'arbre
$r_0$	Rayon extérieur de l'arbre
$r_i$	Rayon intérieur de l'arbre
$\rho_s$	Densité de l'arbre
$\beta$	Angle de calage des aubes
$\Omega$	Vitesse de rotation
$E_s$	Module d'Young de l'arbre
$E_b$	Module d'Young des aubes
$\rho_b$	Densité des aubes
$A_s = \pi (r_0^2 - r_i^2)$	Aire d'une section droite de l'arbre
$I_s = \pi \frac{(r_0^4 - r_i^4)}{4}$	Moment d'inertie diamétral de l'arbre dans le sens de sa flexion
$= I_{sx} = I_{sy}$	
$I_s^{pol} = \pi \frac{(r_0^4 - r_i^4)}{2}$	Moment d'inertie polaire de l'arbre
$J_D = M_D \left( \frac{r^2}{4} + \frac{D_L^2}{12} \right)$	Moment d'inertie diamétral du disque rigide
$= J_{Dx} = J_{Dy}$	
$J_D^{pol} = M_D \frac{r^2}{2}$	Moment d'inertie polaire du disque rigide
$\eta_b$	Coefficient d'amortissement visqueux des aubes
$\eta_s$	Coefficient d'amortissement visqueux de l'arbre
$\eta_{stat}$	Coefficient d'amortissement visqueux de l'arbre
$E_{stat}$	Module d'Young de l'arbre



---

$S_{stat}$	Aire d'une section droite du carter par rapport à sa flexion plane
$\rho_{stat}$	Densité du carter
$I_{stat}$	Moment d'inertie diamétral du carter par rapport à sa flexion plane
$R_{stat}$	Rayon du carter
$\phi_j$	Position angulaire de la $j^{\text{ème}}$ aube dans le repère corotationnel
$m_r$	Masse du balourd
$\psi_b$	Position angulaire de la masse de balourd dans le repère corotationnel
$N_b$	Nombre de paliers
$z_i$	Positons des paliers par rapport à l'arbre
$S_{xx}^b = S_{yy}^b = S^b$	Raideurs des paliers
$D_{xx}^b = D_{yy}^b = D^b$	Coefficients d'amortissement visqueux des paliers
$B_{xx}^b = B_{yy}^b = B^b$	Raideurs de flexion des paliers

## Annexe A

# Modèle d'anneau élastique excité par $N$ poutres frottant en permanence sur sa face interne

### A.1 Energies, potentiels et travaux associés au modèle

Une fois la relation de liaison, exprimée par l'équation 5.6, et les fonctions de Ritz des  $N$  aubes, données par les équations 5.1 et 5.2, introduites dans les expressions des énergies cinétique et potentielle, elles mêmes données par les équations 5.7 et 5.8, il vient les expressions détaillées suivantes :

$$\begin{aligned}
 T = & \frac{1}{2} \int_{-\Omega t}^{2\pi - \Omega t} \rho_{stat} S_{stat} \left\{ \left[ \dot{u}_s(\phi, t) - \Omega \frac{\partial u_s}{\partial \phi}(\phi, t) \right]^2 + \left[ \dot{w}(\phi, t) - \Omega \frac{\partial w}{\partial \phi}(\phi, t) \right]^2 \right\} R_{stat} d\phi \\
 & + \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} \rho_{b_j} S_{b_j} R_{stat} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\dot{u}_s^2(\phi_j, t)}{\cos^2 \alpha_j} - \dot{u}_s(\phi_j, t) \dot{v}_{f_j} \frac{\tan \alpha_j}{\cos \alpha_j} + \Omega \frac{2 \dot{u}_s(\phi_j, t) v_{f_j}}{\pi \cos \alpha_j} \right\} \\
 & + \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} \rho_{b_j} S_{b_j} R_{stat} \left\{ \dot{v}_{f_j}^2 \left( \frac{1}{2} \tan^2 \alpha_j + \left( \frac{3}{2} - \frac{4}{\pi} \right) \right) + \Omega R_{stat} \frac{(\pi^2 - 4\pi + 8)}{\pi^2} \dot{v}_{f_j} - \Omega \frac{2 u_s(\phi_j, t) \dot{v}_{f_j}}{\pi \cos \alpha_j} \right\} \\
 & + \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} \rho_{b_j} S_{b_j} R_{stat} \left\{ \frac{1}{2} \Omega^2 \frac{u_s^2(\phi_j, t)}{\cos^2 \alpha_j} - \frac{8}{\pi^2} \Omega^2 R_{stat} \frac{u_s(\phi_j, t)}{\cos \alpha_j} - \Omega^2 u_s(\phi_j, t) v_{f_j} \frac{\tan \alpha_j}{\cos \alpha_j} \right\} \\
 & + \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} \rho_{b_j} S_{b_j} R_{stat} \left\{ \Omega^2 \left( \frac{1}{2} \tan^2 \alpha_j + \left( \frac{3}{2} - \frac{4}{\pi} \right) \right) v_{f_j}^2 + \frac{8}{\pi^2} \Omega^2 R_{stat} \tan \alpha_j v_{f_j} + \frac{1}{3} \Omega^2 R_{stat}^2 \right\} \\
 & + \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} \rho_{b_j} I_{b_j} \left( \frac{\pi^2}{8 R_{stat}} \dot{v}_{f_j}^2 + 2 \Omega \dot{v}_{f_j} + \Omega^2 R_{stat} \right)
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

$$\begin{aligned}
U = & \frac{1}{2} \int_{-\Omega t}^{2\pi - \Omega t} \frac{E_{stat} I_{stat}}{R_{stat}^3} \left\{ \frac{\partial u_s}{\partial \phi}(\phi, t) + u_s(\phi, t) \right\}^2 d\phi + \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} E_{b_j} S_{b_j} \frac{\pi^2}{8 R_{stat}} \frac{u_s^2(\phi_j, t)}{\cos^2 \alpha_j} \\
& + \sum_{j=1}^N \left\{ \frac{1}{2} E_{b_j} S_{b_j} \frac{\pi^2}{8 R_{stat}} \tan^2 \alpha_j + \frac{1}{2} E_{b_j} I_{b_j} \frac{\pi^4}{32 R_{stat}^3} \right\} v_{f_j}^2 - \sum_{j=1}^N E_{b_j} S_{b_j} \frac{\pi^2}{8 R_{stat}} \frac{\tan \alpha_j}{\cos \alpha_j} u_s(\phi_j, t) v_{f_j}
\end{aligned} \tag{A.2}$$

La force de frottement appliquée par la  $j^{\text{ème}}$  aube sur le carter peut s'obtenir en appliquant le principe d'Hamilton et en utilisant des multiplicateurs de Lagrange (Cf. section 2.1.5). En procédant comme ceci, il vient l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
T_{b_j \rightarrow stat} = & \mu \left[ N_U + \frac{\rho_{b_j} S_{b_j} R_{stat}}{2} (\ddot{u}_s(\phi, t) - \Omega^2 u_s(\phi, t)) + E_{b_j} S_{b_j} \frac{\pi^2}{8 R_{stat}} u_s(\phi, t) \right. \\
& \left. - 2 \rho_{b_j} S_{b_j} \frac{R_{stat}}{\pi} \Omega \dot{u}_s(\phi, t) \tan \alpha \right] \delta(\phi - \phi_j) + \mu \left[ 2 \rho_{b_j} S_{b_j} \frac{R_{stat}}{\pi} \Omega (\cos \alpha_j + \sin \alpha_j \tan \alpha_j) \dot{v}_{f_j}(x = R_{stat}, t) \right. \\
& \left. - \left( \rho_{b_j} S_{b_j} \frac{R_{stat}}{2} - \rho_{b_j} S_{b_j} R_{stat} \left( \frac{3}{2} - \frac{4}{\pi} \right) - \rho_{b_j} I_{b_j} \frac{\pi^2}{8 R_{stat}} \right) \ddot{v}_{f_j}(x = R_{stat}, t) \sin \alpha_j \right] \delta(\phi - \phi_j) \\
& + \mu \left[ 4 \rho_{b_j} S_{b_j} \frac{R_{stat}^2}{\pi^2} \Omega^2 - \left( E_{b_j} S_{b_j} \frac{\pi^2}{8 R_{stat}} - \rho_{b_j} S_{b_j} \frac{R_{stat}}{2} \Omega^2 \right. \right. \\
& \left. \left. - E_{b_j} I_{b_j} \frac{\pi^4}{32 R_{stat}^3} + \rho_{b_j} S_{b_j} R_{stat} \Omega^2 \left( \frac{3}{2} - \frac{4}{\pi} \right) \right) v_{f_j}(x = R_{stat}, t) \sin \alpha_j \right] \delta(\phi - \phi_j)
\end{aligned} \tag{A.3}$$

Cette façon d'exprimer la force de frottement permet de l'insérer simplement dans l'équation matricielle qui gère le comportement dynamique du système. Cependant, ceci implique que cette force soit toujours orientée dans le même sens. Ainsi, ce modèle ne sera valable que si :

- la précharge due au balourd est très supérieure à la force d'interaction entre l'aube et le carter, provenant de la dynamique du système. Ceci permet d'assurer un sens constant de la composante normale de la force d'interaction totale
- $V_{slip}$  a un signe constant.

La première condition est tout à fait envisageable. Quant à la seconde, elle est vraie pour des vitesses de rotation suffisamment élevées.

## A.2 Equation matricielle

Une fois les équations de Lagrange appliquées à l'énergie cinétique, à l'énergie potentielle et au travail des forces de frottement, il vient l'équation matricielle suivante, dans le cas de  $N$  aubes :

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ M_{21} & M_{22} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ M_{(1+2)1} & M_{(1+2)2} & M_{33} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ M_{(N+2)1} & M_{(N+2)2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & M_{(N+2)(N+2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{A}_n \\ \ddot{B}_n \\ \ddot{v}_{f_1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \ddot{v}_{f_N} \end{Bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} 0 & -G_{21} & -G_{(1+2)1} & \cdots & \cdots & \cdots & -G_{(N+2)1} \\ G_{21} & 0 & -G_{(1+2)2} & \cdots & \cdots & \cdots & -G_{(N+2)2} \\ G_{(1+2)1} & G_{(1+2)2} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ G_{(N+2)1} & G_{(N+2)2} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{A}_n \\ \dot{B}_n \\ \dot{v}_{f_1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{v}_{f_N} \end{Bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{1(1+2)} & \cdots & \cdots & \cdots & T_{1(N+2)} \\ T_{21} & T_{22} & T_{2(1+2)} & \cdots & \cdots & \cdots & T_{2(N+2)} \\ T_{(1+2)1} & T_{(1+2)2} & T_{(1+2)(1+2)} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ T_{(N+2)1} & T_{(N+2)2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & T_{(N+2)(N+2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{A}_n \\ \dot{B}_n \\ \dot{v}_{f_1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{v}_{f_N} \end{Bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{1(1+2)} & \cdots & \cdots & \cdots & K_{1(N+2)} \\ K_{21} & K_{22} & K_{2(N+2)} & \cdots & \cdots & \cdots & K_{2(N+2)} \\ K_{(1+2)1} & K_{(1+2)2} & K_{(1+2)(1+2)} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ K_{(N+2)1} & K_{(N+2)2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & K_{(N+2)(N+2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_n \\ B_n \\ v_{f_1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ v_{f_N} \end{Bmatrix} \\
& = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_{(1+2)} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ F_{(N+2)} \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{A.4}$$

avec :

$$\begin{aligned}
M_{11} &= M_{stat} (n^2 + 1) + \sum_{j=1}^N m_{r_j} n^2 \frac{\sin^2(n\phi_j)}{\cos^2 \alpha_j} \\
&\quad + \mu \sum_{j=1}^N m_{r_j} \left( \left\{ 1 + \frac{h}{2R_{stat}} (n^2 - 1) \right\} \cos(n\phi_j) - n \sin(n\phi_j) \tan \alpha_j \right) n \sin(n\phi_j) \\
M_{12} &= - \sum_{j=1}^N m_{r_j} n^2 \frac{\sin(n\phi_j) \cos(n\phi_j)}{\cos^2 \alpha_j} \\
&\quad - \mu \sum_{j=1}^N m_{r_j} \left( \left\{ 1 + \frac{h}{2R_{stat}} (n^2 - 1) \right\} \cos(n\phi_j) - n \sin(n\phi_j) \tan \alpha_j \right) n \cos(n\phi_j) \\
M_{21} &= - \sum_{j=1}^N m_{r_j} n^2 \frac{\sin(n\phi_j) \cos(n\phi_j)}{\cos^2 \alpha_j} \\
&\quad + \mu \sum_{j=1}^N m_{r_j} \left( \left\{ 1 + \frac{h}{2R_{stat}} (n^2 - 1) \right\} \sin(n\phi_j) + n \cos(n\phi_j) \tan \alpha_j \right) n \sin(n\phi_j) \quad (A.5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{22} &= M_{stat} (n^2 + 1) + \sum_{j=1}^N m_{r_j} n^2 \frac{\cos^2(n\phi_j)}{\cos^2 \alpha_j} \\
&\quad - \mu \sum_{j=1}^N m_{r_j} \left( \left\{ 1 + \frac{h}{2R_{stat}} (n^2 - 1) \right\} \sin(n\phi_j) + n \cos(n\phi_j) \tan \alpha_j \right) n \cos(n\phi_j) \\
M_{(j+2)1} &= m_{r_j} \left( \frac{\tan \alpha_j}{\cos \alpha_j} - \mu (\cos \alpha_j + \sin \alpha_j \tan \alpha_j) \right) n \sin(n\phi_j) \\
M_{(j+2)2} &= -m_{r_j} \left( \frac{\tan \alpha_j}{\cos \alpha_j} - \mu (\cos \alpha_j + \sin \alpha_j \tan \alpha_j) \right) n \cos(n\phi_j) \\
M_{(j+2)(j+2)} &= m_{t_j} + m_{r_j} \tan^2 \alpha_j - \mu (\cos \alpha_j + \sin \alpha_j \tan \alpha_j) (m_{r_j} - m_{t_j}) \sin \alpha_j
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{21} &= 2M_{stat} n \Omega (n^2 + 1) \\
G_{(j+2)1} &= 2\rho_{b_j} S_{b_j} \frac{R_{stat}}{\pi} \Omega n \frac{\sin(n\phi_j)}{\cos \alpha_j} \\
G_{(j+2)2} &= -2\rho_{b_j} S_{b_j} \frac{R_{stat}}{\pi} \Omega n \frac{\cos(n\phi_j)}{\cos \alpha_j} \quad (A.6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{11} &= - \sum_{j=1}^N 2\mu\rho_{b_j} S_{b_j} \frac{R_{stat}}{\pi} \Omega n \sin(n\phi_j) \tan \alpha_j \\
&\quad \times \left( \left\{ 1 + \frac{h}{2R_{stat}} (n^2 - 1) \right\} \cos(n\phi_j) - n \sin(n\phi_j) \tan \alpha_j \right) \\
T_{12} &= \sum_{j=1}^N 2\mu\rho_{b_j} S_{b_j} \frac{R_{stat}}{\pi} \Omega n \cos(n\phi_j) \tan \alpha_j \\
&\quad \times \left( \left\{ 1 + \frac{h}{2R_{stat}} (n^2 - 1) \right\} \cos(n\phi_j) - n \sin(n\phi_j) \tan \alpha_j \right) \\
T_{21} &= - \sum_{j=1}^N 2\mu\rho_{b_j} S_{b_j} \frac{R_{stat}}{\pi} \Omega n \sin(n\phi_j) \tan \alpha_j \\
&\quad \times \left( \left\{ 1 + \frac{h}{2R_{stat}} (n^2 - 1) \right\} \sin(n\phi_j) + n \cos(n\phi_j) \tan \alpha_j \right) \\
T_{22} &= \sum_{j=1}^N 2\mu\rho_{b_j} S_{b_j} \frac{R_{stat}}{\pi} \Omega n \cos(n\phi_j) \tan \alpha_j \\
&\quad \times \left( \left\{ 1 + \frac{h}{2R_{stat}} (n^2 - 1) \right\} \sin(n\phi_j) + n \cos(n\phi_j) \tan \alpha_j \right) \tag{A.7} \\
T_{(j+2)1} &= 2\mu\rho_{b_j} S_{b_j} \frac{R_{stat}}{\pi} \Omega n \sin(n\phi_j) \tan \alpha_j (\cos \alpha_j + \sin \alpha_j \tan \alpha_j) \\
T_{(j+2)2} &= -2\mu\rho_{b_j} S_{b_j} \frac{R_{stat}}{\pi} \Omega n \cos(n\phi_j) \tan \alpha_j (\cos \alpha_j + \sin \alpha_j \tan \alpha_j) \\
T_{1(j+2)} &= -2\mu\rho_{b_j} S_{b_j} \frac{R_{stat}}{\pi} \Omega (\cos \alpha_j + \sin \alpha_j \tan \alpha_j) \\
&\quad \times \left( \left\{ 1 + \frac{h}{2R_{stat}} (n^2 - 1) \right\} \cos(n\phi_j) - n \sin(n\phi_j) \tan \alpha_j \right) \\
T_{2(j+2)} &= -2\mu\rho_{b_j} S_{b_j} \frac{R_{stat}}{\pi} \Omega (\cos \alpha_j + \sin \alpha_j \tan \alpha_j) \\
&\quad \times \left( \left\{ 1 + \frac{h}{2R_{stat}} (n^2 - 1) \right\} \sin(n\phi_j) + n \cos(n\phi_j) \tan \alpha_j \right) \\
T_{(j+2)(j+2)} &= 2\mu\rho_{b_j} S_{b_j} \frac{R_{stat}}{\pi} \Omega (\cos \alpha_j + \sin \alpha_j \tan \alpha_j)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{11} &= K_{stat} n^2 (n^2 - 1)^2 - M_{stat} n^2 \Omega^2 (n^2 + 1) + \sum_{j=1}^N (k_{r_j} - m_{r_j} \Omega^2) n^2 \frac{\sin^2(n\phi_j)}{\cos^2 \alpha_j} \\
&\quad + \mu \sum_{j=1}^N (k_{r_j} - m_{r_j} \Omega^2) n \sin(n\phi_j) \left( \left\{ 1 + \frac{h}{2R_{stat}} (n^2 - 1) \right\} \cos(n\phi_j) - n \sin(n\phi_j) \tan \alpha_j \right) \\
K_{12} &= - \sum_{j=1}^N (k_{r_j} - m_{r_j} \Omega^2) n^2 \frac{\sin(n\phi_j) \cos(n\phi_j)}{\cos^2 \alpha_j} \\
&\quad - \mu \sum_{j=1}^N (k_{r_j} - m_{r_j} \Omega^2) n \cos(n\phi_j) \left( \left\{ 1 + \frac{h}{2R_{stat}} (n^2 - 1) \right\} \cos(n\phi_j) - n \sin(n\phi_j) \tan \alpha_j \right) \\
K_{21} &= - \sum_{j=1}^N (k_{r_j} - m_{r_j} \Omega^2) n^2 \frac{\sin(n\phi_j) \cos(n\phi_j)}{\cos^2 \alpha_j} \\
&\quad + \mu \sum_{j=1}^N (k_{r_j} - m_{r_j} \Omega^2) n \sin(n\phi_j) \left( \left\{ 1 + \frac{h}{2R_{stat}} (n^2 - 1) \right\} \sin(n\phi_j) + n \cos(n\phi_j) \tan \alpha_j \right) \\
K_{22} &= K_{stat} n^2 (n^2 - 1)^2 - M_{stat} n^2 \Omega^2 (n^2 + 1) + \sum_{j=1}^N (k_{r_j} - m_{r_j} \Omega^2) n^2 \frac{\cos^2(n\phi_j)}{\cos^2 \alpha_j} \\
&\quad - \mu \sum_{j=1}^N (k_{r_j} - m_{r_j} \Omega^2) n \cos(n\phi_j) \left( \left\{ 1 + \frac{h}{2R_{stat}} (n^2 - 1) \right\} \sin(n\phi_j) + n \cos(n\phi_j) \tan \alpha_j \right) \\
K_{(j+2)1} &= (k_{r_j} - m_{r_j} \Omega^2) n \sin(n\phi_j) \left( \frac{\tan \alpha_j}{\cos \alpha_j} - \mu (\cos \alpha_j + \sin \alpha_j \tan \alpha_j) \right) \\
K_{(j+2)2} &= - (k_{r_j} - m_{r_j} \Omega^2) n \cos(n\phi_j) \left( \frac{\tan \alpha_j}{\cos \alpha_j} - \mu (\cos \alpha_j + \sin \alpha_j \tan \alpha_j) \right) \\
K_{1(j+2)} &= (k_{r_j} - m_{r_j} \Omega^2) n \sin(n\phi_j) \frac{\tan \alpha_j}{\cos \alpha_j} \\
&\quad + \mu \left( \left\{ 1 + \frac{h}{2R_{stat}} (n^2 - 1) \right\} \cos(n\phi_j) - n \sin(n\phi_j) \tan \alpha_j \right) \\
&\quad \times \left[ (k_{r_j} - m_{r_j} \Omega^2) - \left( k_{t_j} - \left( m_{t_j} - \rho_{b_j} I_{b_j} \frac{\pi^2}{8R_{stat}} \right) \Omega^2 \right) \right] \sin \alpha_j \\
K_{2(j+2)} &= - (k_{r_j} - m_{r_j} \Omega^2) n \cos(n\phi_j) \frac{\tan \alpha_j}{\cos \alpha_j} \\
&\quad + \mu \left( \left\{ 1 + \frac{h}{2R_{stat}} (n^2 - 1) \right\} \sin(n\phi_j) + n \cos(n\phi_j) \tan \alpha_j \right) \\
&\quad \times \left[ (k_{r_j} - m_{r_j} \Omega^2) - \left( k_{t_j} - \left( m_{t_j} - \rho_{b_j} I_{b_j} \frac{\pi^2}{8R_{stat}} \right) \Omega^2 \right) \right] \sin \alpha_j \\
K_{(j+2)(j+2)} &= [k_{r_j} \tan^2 \alpha_j + k_{t_j}] - \left[ m_{r_j} \tan^2 \alpha_j + \left( m_{t_j} - \rho_{b_j} I_{b_j} \frac{\pi^2}{8R_{stat}} \right) \right] \Omega^2 \\
&\quad - \mu (\cos \alpha_j + \sin \alpha_j \tan \alpha_j) \times \left[ (k_{r_j} - m_{r_j} \Omega^2) - \left( k_{t_j} - \left( m_{t_j} - \rho_{b_j} I_{b_j} \frac{\pi^2}{8R_{stat}} \right) \Omega^2 \right) \right] \sin \alpha_j
\end{aligned} \tag{A.8}$$

$$\begin{aligned}
F_1 &= \sum_{j=1}^N \frac{8}{\pi^2} m_{r_j} \Omega^2 R_{stat} n \frac{\sin(n\phi_j)}{\cos \alpha_j} \\
&\quad + \sum_{j=1}^N \mu \left[ \left\{ 1 + \frac{h}{2R_{stat}} (n^2 - 1) \right\} \cos(n\phi_j) - n \sin(n\phi_j) \tan \alpha_j \right] \left( 4\rho_{b_j} S_{b_j} \frac{R_{stat}^2}{\pi^2} \Omega^2 + N_U \right) \\
F_2 &= - \sum_{j=1}^N \frac{8}{\pi^2} m_{r_j} \Omega^2 R_{stat} n \frac{\cos(n\phi_j)}{\cos \alpha_j} \\
&\quad + \sum_{j=1}^N \mu \left[ \left\{ 1 + \frac{h}{2R_{stat}} (n^2 - 1) \right\} \sin(n\phi_j) + n \cos(n\phi_j) \tan \alpha_j \right] \left( 4\rho_{b_j} S_{b_j} \frac{R_{stat}^2}{\pi^2} \Omega^2 + N_U \right) \\
F_{(j+2)} &= 4\rho_{b_j} S_{b_j} \frac{R_{stat}^2}{\pi^2} \tan \alpha_j \Omega^2 - \mu [\cos \alpha_j + \sin \alpha_j \tan \alpha_j] \left( 4\rho_{b_j} S_{b_j} \frac{R_{stat}^2}{\pi^2} \Omega^2 + N_U \right)
\end{aligned} \tag{A.9}$$

Dans toutes ces expressions, les masses modales de traction/compression et de flexion des aubes sont respectivement représentées par :

$$\begin{aligned}
m_{r_j} &= \rho_{b_j} S_{b_j} \frac{R_{stat}}{2} \\
m_{t_j} &= \rho_{b_j} S_{b_j} R_{stat} \left( \frac{3}{2} - \frac{4}{\pi} \right) + \rho_{b_j} I_{b_j} \frac{\pi^2}{8R_{stat}} \quad \text{avec } j \in \{1, \dots, N\}
\end{aligned} \tag{A.10}$$

De même leurs raideurs modales de traction/compression et de flexion sont notées :

$$\begin{aligned}
k_{r_j} &= E_{b_j} S_{b_j} \frac{\pi^2}{8R_{stat}} \\
k_{t_j} &= E_{b_j} I_{b_j} \frac{\pi^4}{32R_{stat}^3} \quad \text{avec } j \in \{1, \dots, N\}
\end{aligned} \tag{A.11}$$

Les coefficients  $M_{stat} = \rho_{stat} S_{stat} R_{stat} \pi$  et  $K_{stat} = \frac{E_{stat} I_{stat} \pi}{R_{stat}^3}$  sont quant à eux homogènes à la masse et à la raideur de l'anneau.





## Annexe B

# Polynôme caractéristique associé au modèle d'anneau élastique excité par $N$ aubes ne possédant qu'un degré de liberté de traction/compression

Le polynôme caractéristique associé à l'anneau élastique excité par  $N$  aubes ne possédant qu'un degré de liberté de traction/compression est de la forme :

$$P(\lambda) = A\lambda^4 + B\lambda^2 + C \quad (\text{B.1})$$

avec

$$\begin{aligned} A = & \left[ M_{stat} (n^2 + 1) + \sum_{j=1}^N m_{r_j} n^2 \cos^2(n\phi_j) \right] \\ & \times \left[ M_{stat} (n^2 + 1) + \sum_{j=1}^N m_{r_j} n^2 \sin^2(n\phi_j) \right] \\ & - \left[ - \sum_{j=1}^N m_{r_j} n^2 \cos(n\phi_j) \sin(n\phi_j) \right]^2 \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

$$\begin{aligned}
B = & - \left[ M_{stat} n^2 \Omega^2 (n^2 + 1) - K_{stat} n^2 (n^2 - 1)^2 - \sum_{j=1}^N (k_{r_j} - m_{r_j} \Omega^2) n^2 \sin^2(n\phi_j) \right] \\
& \times \left[ M_{stat} (n^2 + 1) + \sum_{j=1}^N m_{r_j} n^2 \cos^2(n\phi_j) \right] \\
& - \left[ M_{stat} n^2 \Omega^2 (n^2 + 1) - K_{stat} n^2 (n^2 - 1)^2 - \sum_{j=1}^N (k_{r_j} - m_{r_j} \Omega^2) n^2 \cos^2(n\phi_j) \right] \\
& \times \left[ M_{stat} (n^2 + 1) + \sum_{j=1}^N m_{r_j} n^2 \sin^2(n\phi_j) \right] \\
& - 2 \left[ - \sum_{j=1}^N (k_{r_j} - m_{r_j} \Omega^2) n^2 \sin(n\phi_j) \cos(n\phi_j) \right] \left[ - \sum_{j=1}^N m_{r_j} n^2 \sin(n\phi_j) \cos(n\phi_j) \right] \\
& + [2M_{stat} n \Omega (n^2 + 1)]^2 \quad (B.3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C = & \left[ M_{stat} n^2 \Omega^2 (n^2 + 1) - K_{stat} n^2 (n^2 - 1)^2 - \sum_{j=1}^N (k_{r_j} - m_{r_j} \Omega^2) n^2 \sin^2(n\phi_j) \right] \\
& \times \left[ M_{stat} n^2 \Omega^2 (n^2 + 1) - K_{stat} n^2 (n^2 - 1)^2 - \sum_{j=1}^N (k_j - m_j \Omega^2) n^2 \cos^2(n\phi_j) \right] \\
& - \left[ - \sum_{j=1}^N (k_j - m_j \Omega^2) n^2 \sin(n\phi_j) \cos(n\phi_j) \right]^2 \quad (B.4)
\end{aligned}$$

## Annexe C

# Modèle de rotor flexible aubagé

### C.1 Energies, potentiels et travaux associés au modèle

Dans le repère corotationnel, les énergies cinétique  $T_{blade}$  et interne de déformations élastiques  $\nu_{intblade}$  associées à une aube, ont les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
 T_{blade} &= \int_0^L \frac{1}{2} \rho_b S_b \vec{V}_{S/R_0}^2(G) ds + \int_0^L \frac{1}{2} \vec{\Omega}_{S/R_0}^T \mathbf{I} \vec{\Omega}_{S/R_0} ds \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^L \rho_b S_b \{ \dot{u}(l, t) + \dot{v}(l, t) + \dot{\eta}(s, t) - 2\dot{u}(l, t)\dot{\eta}(s, t) \cos \beta \sin \phi_j + 2\dot{v}(l, t)\dot{\eta}(s, t) \cos \beta \cos \phi_j \} ds \\
 &\quad + \frac{1}{2} \int_0^L \rho_b S_b \{ \dot{u}'(l, t)(s+r) \cos \phi_j + \dot{v}'(l, t)(s+r) \sin \phi_j + 2\dot{u}'(l, t)\dot{v}'(l, t)(s+r) \cos \phi_j \sin \phi_j \} ds \\
 &\quad + \frac{1}{2} \int_0^L \rho_b S_b \{ 2\dot{u}'(l, t)\dot{\eta}(s, t)(s+r) \sin \beta \cos \phi_j + 2\dot{v}'(l, t)\dot{\eta}(s, t)(s+r) \sin \beta \sin \phi_j \} ds \\
 &\quad + \frac{1}{2} \int_0^L \rho_b S_b \{ 2\Omega [u(l, t)\dot{v}(l, t) - \dot{u}(l, t)v(l, t) + (u(l, t) \cos \phi_j + v(l, t) \sin \phi_j)\dot{\eta}(s, t) \cos \beta \\
 &\quad \quad - (\dot{u}(l, t) \cos \phi_j + \dot{v}(l, t) \sin \phi_j)\eta(s, t) \cos \beta] \} ds \\
 &\quad + \frac{1}{2} \int_0^L \rho_b S_b \Omega \{ u(l, t) + v(l, t) + \eta(s, t) \cos \beta - 2u(l, t)\eta(s, t) \cos \beta \sin \phi_j + 2v(l, t)\eta(s, t) \cos \beta \cos \phi_j \} ds \\
 &\quad + \frac{1}{2} \int_0^L \rho_b S_b \{ 2(s+r)\Omega [u(l, t) \cos \phi_j + v(l, t) \sin \phi_j] + 2(s+r)\Omega [\dot{v}(l, t) \cos \phi_j - \dot{u}(l, t) \sin \phi_j] + \Omega(s+r) \} ds \\
 &\quad \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \dots + \frac{1}{2} \int_0^L \rho_b S_b 2(s+r) \Omega \{ \ddot{u}'(l,t) u'(l,t) \cos \phi_j \sin \phi_j - \dot{v}'(l,t) v'(l,t) \cos \phi_j \sin \phi_j - \ddot{u}'(l,t) v'(l,t) \cos \phi_j \\
& \quad - \dot{v}'(l,t) u'(l,t) \cos \phi_j \} ds \\
& + \frac{1}{2} \int_0^L \rho_b S_b 2(s+r) \Omega \{ [\dot{\eta}(s,t) u'(l,t) + \eta(s,t) \dot{u}'(l, st)] \sin \beta \sin \phi_j - [\dot{\eta}(s,t) v'(l,t) + \eta(s,t) \dot{v}'(l, st)] \sin \beta \cos \phi_j \\
& \quad + \dot{\eta}(s,t) \cos \beta \} ds \\
& - \frac{1}{2} \int_0^L \rho_b S_b \Omega(s+r) \{ u'(l,t) \cos \phi_j + v'(l,t) \sin \phi_j + 2u'(l,t) v'(l,t) \cos \phi_j \sin \phi_j \} ds \\
& - \frac{1}{2} \int_0^L \rho_b S_b \Omega(s+r) \{ 2\eta(s,t) v'(l,t) \sin \beta \sin \phi_j + 2\eta(s,t) u'(l,t) \sin \beta \cos \phi_j \} ds \\
& + \frac{1}{2} \int_0^L \rho_b I_b \{ \dot{u}'(l,t) \sin \beta \cos \phi_j + \dot{v}'(l,t) \sin \beta \sin \phi_j + \dot{\eta}'(s,t) + 2\dot{u}'(l,t) \dot{\eta}'(s,t) \sin \beta \cos \phi_j \\
& \quad + 2\dot{v}'(l,t) \dot{\eta}'(s,t) \sin \beta \sin \phi_j \} ds \\
& + \frac{1}{2} \int_0^L \rho_b I_b \{ 2\dot{u}'(l,t) \dot{v}'(l,t) \sin \beta \cos \phi_j \sin \phi_j \} ds \\
& + \frac{1}{2} \int_0^L \rho_b I_b 2\Omega \{ \dot{v}'(l,t) (u'(l,t) \sin \phi_j - v'(l,t) \cos \phi_j) \sin \beta \sin \phi_j + \dot{v}'(l,t) \sin \beta \cos \beta \sin \phi_j \\
& \quad - \dot{v}'(l,t) u'(l,t) \cos \beta \} ds \\
& + \frac{1}{2} \int_0^L \rho_b I_b 2\Omega \{ \dot{u}'(l,t) (u'(l,t) \sin \phi_j - v'(l,t) \cos \phi_j) \sin \beta \cos \phi_j + \dot{u}'(l,t) \sin \beta \cos \beta \cos \phi_j \} ds \\
& + \frac{1}{2} \int_0^L \rho_b I_b 2\Omega \{ \dot{\eta}'(s,t) \cos \beta + \dot{\eta}'(s,t) u'(l,t) \sin \beta \sin \phi_j - \dot{\eta}'(s,t) v'(l,t) \sin \beta \cos \phi_j \} ds \\
& + \frac{1}{2} \int_0^L \rho_b I_b \Omega \{ u'(l,t) \sin \beta \sin \phi_j - u'(l,t) \cos \beta + v'(l,t) \sin \beta \cos \phi_j - v'(l,t) \cos \beta + \cos \beta \} ds \\
& + \frac{1}{2} \int_0^L \rho_b I_b 2\Omega \{ u'(l,t) \sin \beta \cos \beta \sin \phi_j - v'(l,t) \cos \beta \sin \beta \cos \phi_j - u'(l,t) v'(l,t) \sin \beta \cos \phi_j \sin \phi_j \} ds \\
& + \frac{1}{2} \int_0^L \rho_b I_y \{ \dot{u}'(l,t) \cos \beta \cos \phi_j + \dot{v}'(l,t) \cos \beta \sin \phi_j + 2\dot{u}'(l,t) \dot{v}'(l,t) \cos \beta \sin \phi_j \cos \phi_j \} ds \\
& + \frac{1}{2} \int_0^L \rho_b I_y 2\Omega \{ \dot{v}'(l,t) (u'(l,t) \sin \phi_j - v'(l,t) \cos \phi_j) \cos \beta \sin \phi_j - \dot{v}'(l,t) \sin \beta \cos \beta \sin \phi_j \\
& \quad - \dot{v}'(l,t) u'(l,t) \sin \beta \} ds \\
& + \frac{1}{2} \int_0^L \rho_b I_y 2\Omega \{ \dot{u}'(l,t) (u'(l,t) \sin \phi_j - v'(l,t) \cos \phi_j) \cos \beta \cos \phi_j - \dot{u}'(l,t) \sin \beta \cos \beta \cos \phi_j \} ds \\
& + \frac{1}{2} \int_0^L \rho_b I_y 2\Omega \{ \eta'(s,t) \dot{u}'(l,t) \sin \beta \sin \phi_j - \eta'(s,t) \dot{v}'(l,t) \sin \beta \cos \phi_j \} ds \\
& + \frac{1}{2} \int_0^L \rho_b I_y \Omega \{ u'(l,t) \cos \beta \sin \phi_j - u'(l,t) \sin \beta + v'(l,t) \cos \beta \cos \phi_j - v'(l,t) \sin \beta - \eta'(s,t) \sin \beta + \sin \beta \} ds \\
& - \frac{1}{2} \int_0^L \rho_b I_y 2\Omega \{ u'(l,t) \sin \beta \cos \beta \sin \phi_j - v'(l,t) \cos \beta \sin \beta \cos \phi_j + u'(l,t) v'(l,t) \cos \beta \cos \phi_j \sin \phi_j \} ds \\
& - \frac{1}{2} \int_0^L \rho_b I_y 2\Omega \{ \eta'(s,t) u'(l,t) \sin \beta \cos \phi_j + \eta'(s,t) v'(l,t) \sin \beta \sin \phi_j \} ds \\
& + \frac{1}{2} \int_0^L \rho_b I_z \{ \dot{u}'(l,t) \sin \phi_j + \dot{v}'(l,t) \cos \phi_j - 2\dot{u}'(l,t) \dot{v}'(l,t) \sin \phi_j \cos \phi_j \} ds \\
& + \frac{1}{2} \int_0^L \rho_b I_z 2\Omega \{ \dot{v}'(l,t) (u'(l,t) \cos \phi_j + v'(l,t) \sin \phi_j) \cos \phi_j + \dot{v}'(l,t) \eta'(s,t) \sin \beta \cos \phi_j \} ds \\
& - \frac{1}{2} \int_0^L \rho_b I_z 2\Omega \{ \dot{u}'(l,t) (u'(l,t) \cos \phi_j + v'(l,t) \sin \phi_j) \sin \phi_j + \dot{u}'(l,t) \eta'(s,t) \sin \beta \sin \phi_j \} ds \\
& + \frac{1}{2} \int_0^L \rho_b I_z \Omega \{ u'(l,t) \cos \phi_j + v'(l,t) \sin \phi_j + \eta'(s,t) \sin \beta \} ds \\
& + \frac{1}{2} \int_0^L \rho_b I_z 2\Omega \{ \eta'(s,t) u'(l,t) \sin \beta \cos \phi_j + \eta'(s,t) v'(l,t) \sin \beta \sin \phi_j + u'(l,t) v'(l,t) \cos \phi_j \sin \phi_j \} ds
\end{aligned}$$

(C.1)

$$\nu_{\text{intblade}} = \frac{1}{2} \int_0^L E_b I_b (\eta''(s, t))^2 ds \quad (\text{C.2})$$

Chaque aube est amortie par l'intermédiaire d'une fonction de dissipation  $F_{d_{blade}}$  et, soumise à la force centrifuge résultant de sa rotation, par l'intermédiaire d'une fonction de précontrainte  $\nu_{g_{blade}}$  dont les expressions sont les suivantes :

$$F_{d_{blade}} = \frac{1}{2} \int_0^L \eta_b E_b I_b (\dot{\eta}''(s, t))^2 ds \quad (\text{C.3})$$

$$\nu_{g_{blade}} = \frac{1}{2} \int_0^L \rho_b A_b \Omega^2 \left[ \frac{R^2 - (s + r)^2}{2} \right] \eta'^2(s, t) ds \quad (\text{C.4})$$

Les énergies cinétique  $T_{shaft}$ , interne de déformations élastiques  $\nu_{\text{intshaft}}$  ainsi que la fonction de dissipation  $F_{d_{shaft}}$  associées à l'arbre ont, quant à elles, les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} T_{shaft} = & \frac{1}{2} \int_0^l \rho_s A_s (\dot{u}^2(z, t) + \dot{v}^2(z, t)) dz + \int_0^l \rho_s A_s \Omega \{u(z, t) \dot{v}(z, t) - \dot{u}(z, t) v(z, t)\} dz \\ & + \frac{1}{2} \int_0^l \rho_s A_s \Omega^2 (u^2(z, t) + v^2(z, t)) dz + \frac{1}{2} \int_0^l \rho_s \left\{ I_{s_x} \dot{v}'^2(z, t) + I_{s_y} \dot{u}'^2(z, t) \right\} dz \\ & + \int_0^l \rho_s \Omega \{ I_{s_x} \dot{v}'(z, t) u'(z, t) - I_{s_y} \dot{u}'(z, t) v'(z, t) \} dz + \frac{1}{2} \int_0^l \rho_s \Omega^2 \left\{ (I_{s_y} - I_s^{pol}) v'^2(z, t) + (I_{s_x} - I_s^{pol}) u'^2(z, t) \right\} dz \\ & + \frac{1}{2} \int_0^l \rho_s I_s^{pol} (\Omega^2 - 2\Omega \dot{v}'(z, t) u'(z, t)) dz \\ & + \frac{1}{2} M_D (\dot{u}^2(l, t) + \dot{v}^2(l, t)) + M_D \Omega \{u(l, t) \dot{v}(l, t) - \dot{u}(l, t) v(l, t)\} + \frac{1}{2} M_D \Omega^2 (u^2(l, t) + v^2(l, t)) \\ & + \frac{1}{2} \left\{ J_{D_x}^{diam} \dot{v}'^2(l, t) + J_{D_y}^{diam} \dot{u}'^2(l, t) \right\} + \Omega \left\{ J_{D_x}^{diam} \dot{v}'(l, t) u'(l, t) - J_{D_y}^{diam} \dot{u}'(l, t) v'(l, t) \right\} \\ & + \frac{1}{2} \Omega^2 \left\{ \left( J_{D_y}^{diam} - J_D^{pol} \right) v'^2(l, t) + \left( J_{D_x}^{diam} - J_D^{pol} \right) u'^2(l, t) \right\} + \frac{1}{2} J_D^{pol} (\Omega^2 - 2\Omega \dot{v}'(l, t) u'(l, t)) \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

$$\nu_{\text{intshaft}} = \frac{1}{2} \int_0^l E_s I_s (u''^2(z, t) + v''^2(z, t)) dz \quad (\text{C.6})$$

$$F_{d_{shaft}} = \frac{1}{2} \int_0^l \eta_s E_s I_s (\dot{u}''^2(z, t) + \dot{v}''^2(z, t)) dz \quad (\text{C.7})$$

où les lettres  $I$  et  $J$  désignent des inerties polaire ( $^{pol}$ ) et diamétrale ( $^{diam}$ ) par rapport aux axes indiqués.

Les paliers sont modélisés par l'intermédiaire d'un potentiel  $\nu_{bearings}$  associé à leurs raideurs ainsi que par une fonction de dissipation  $F_{d_{bearings}}$  associée à leur amortissement dont les expressions sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \nu_{bearings} = & \sum_{i=1}^{Nb} \frac{1}{2} \left[ S_{xx}^b \{u(z_i, t) \cos \Omega t - v(z_i, t) \sin \Omega t\}^2 + S_{yy}^b \{u(z_i, t) \sin \Omega t + v(z_i, t) \cos \Omega t\}^2 \right] \\ & + \sum_{i=1}^{Nb} \frac{1}{2} \left[ B_{xx}^b \{u'(z_i, t) \cos \Omega t - v'(z_i, t) \sin \Omega t\}^2 + B_{yy}^b \{u'(z_i, t) \sin \Omega t + v'(z_i, t) \cos \Omega t\}^2 \right] \end{aligned} \quad (C.8)$$

$$\begin{aligned} F_{d_{bearings}} = & \sum_{i=1}^{Nb} \frac{1}{2} \left[ D_{xx}^b \{\dot{u}(z_i, t) \cos \Omega t - u(z_i, t) \Omega \sin \Omega t - \dot{v}(z_i, t) \sin \Omega t - v(z_i, t) \Omega \cos \Omega t\}^2 \right] \\ & + \sum_{i=1}^{Nb} \frac{1}{2} \left[ D_{yy}^b \{\dot{u}(z_i, t) \sin \Omega t + u(z_i, t) \Omega \cos \Omega t + \dot{v}(z_i, t) \cos \Omega t - v(z_i, t) \Omega \sin \Omega t\}^2 \right] \end{aligned} \quad (C.9)$$

## C.2 Equation matricielle

L'application des équations de Lagrange aux éléments précédents aboutit à l'équation matricielle 6.8 dont les éléments sont les suivants, avec  $m \in [1, m_{tot}]$ ,  $q \in [1, m_{tot}]$ ,  $c \in [3, n_{tot} + 2]$ ,  $p \in [3, n_{tot} + 2]$  et  $j \in [1, N_{tot}]$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{rotor}(1, 1) &= M_s + M_D + N_{tot} M_b \\ \mathbf{M}_{rotor}(1, 2) &= 0 \\ \mathbf{M}_{rotor}(1, 2m + 1) &= \int_0^l \rho_s A_s W_m(z) dz + M_D W_m(l) + N_{tot} M_b W_m(l) \\ \mathbf{M}_{rotor}(1, 2m + 2) &= 0 \\ \mathbf{M}_{rotor}(1, 2m_{tot} + c + (j - 1)n_{tot}) &= - \int_0^L \rho_b A_b Y_{c-2}(s) ds \cos \beta \sin \phi_j \\ \mathbf{M}_{rotor}(2, 1) &= 0 \\ \mathbf{M}_{rotor}(2, 2) &= M_s + M_D + N_{tot} M_b \\ \mathbf{M}_{rotor}(2, 2m + 1) &= 0 \\ \mathbf{M}_{rotor}(2, 2m + 2) &= \int_0^l \rho_s A_s W_m(z) dz + M_D W_m(l) + N_{tot} M_b W_m(l) \\ \mathbf{M}_{rotor}(2, 2m_{tot} + c + (j - 1)n_{tot}) &= \int_0^L \rho_b A_b Y_{c-2}(s) ds \cos \beta \cos \phi_j \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \vdots \\
\mathbf{M}_{rotor}(2m+1, 1) &= \int_0^l \rho_s A_s W_m(z) dz + M_D W_m(l) + N_{tot} M_b W_m(l) \\
\mathbf{M}_{rotor}(2m+1, 2) &= 0 \\
\mathbf{M}_{rotor}(2m+1, 2q+1) &= \int_0^l \rho_s A_s W_q(z) W_m(z) dz + \int_0^l \rho_s I_{s_y} W'_q(z) W'_m(z) dz + M_D W_q(l) W_m(l) \\
&\quad + J_{D_y}^{diam} W'_q(l) W'_m(l) + N_{tot} M_b W_q(l) W_m(l) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{N_{tot}} M_b \left\{ r + Lr + \frac{L}{3} \right\} W'_q(l) W'_m(l) \cos \phi_j + \sum_{j=1}^{N_{tot}} L \rho_b I_b \sin \beta \cos \phi_j W'_q(l) W'_m(l) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{N_{tot}} L \rho_b I_y \cos \beta \cos \phi_j W'_q(l) W'_m(l) + \sum_{j=1}^{N_{tot}} L \rho_b I_z \sin \phi_j W'_q(l) W'_m(l) \\
\mathbf{M}_{rotor}(2m+1, 2q+2) &= \sum_{j=1}^{N_{tot}} M_b \left\{ r + Lr + \frac{L}{3} \right\} W'_q(l) W'_m(l) \sin \phi_j \cos \phi_j \\
&\quad + \sum_{j=1}^{N_{tot}} L \rho_b I_b \sin \beta \cos \phi_j \sin \phi_j W'_q(l) W'_m(l) + \sum_{j=1}^{N_{tot}} L \rho_b I_y \cos \beta \cos \phi_j \sin \phi_j W'_q(l) W'_m(l) \\
&\quad - \sum_{j=1}^{N_{tot}} L \rho_b I_z \cos \phi_j \sin \phi_j W'_q(l) W'_m(l) \\
\mathbf{M}_{rotor}(2m+1, 2m_{tot} + c + (j-1)n_{tot}) &= - \int_0^L \rho_b A_b Y_{c-2}(s) ds W_m(l) \cos \beta \sin \phi_j \\
&\quad + \int_0^L \rho_b A_b Y_{c-2}(s)(s+r) ds W'_m(l) \sin \beta \cos \phi_j + \int_0^L \rho_b I_b Y'_{c-2}(s) ds W'_m(l) \sin \beta \cos \phi_j \\
\mathbf{M}_{rotor}(2m+2, 1) &= 0 \\
\mathbf{M}_{rotor}(2m+2, 2) &= \int_0^l \rho_s A_s W_m(z) dz + M_D W_m(l) + N_{tot} M_b W_m(l) \\
\mathbf{M}_{rotor}(2m+2, 2q+1) &= \sum_{j=1}^{N_{tot}} M_b \left\{ r + Lr + \frac{L}{3} \right\} W'_q(l) W'_m(l) \sin \phi_j \cos \phi_j \\
&\quad + \sum_{j=1}^{N_{tot}} L \rho_b I_b \sin \beta \cos \phi_j \sin \phi_j W'_q(l) W'_m(l) + \sum_{j=1}^{N_{tot}} L \rho_b I_y \cos \beta \cos \phi_j \sin \phi_j W'_q(l) W'_m(l) \\
&\quad - \sum_{j=1}^{N_{tot}} L \rho_b I_z \cos \phi_j \sin \phi_j W'_q(l) W'_m(l) \\
\mathbf{M}_{rotor}(2m+2, 2q+2) &= \int_0^l \rho_s A_s W_q(z) W_m(z) dz + \int_0^l \rho_s I_{s_x} W'_q(z) W'_m(z) dz + M_D W_q(l) W_m(l) \\
&\quad + J_{D_x}^{diam} W'_q(l) W'_m(l) + N_{tot} M_b W_q(l) W_m(l) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{N_{tot}} M_b \left\{ r + Lr + \frac{L}{3} \right\} W'_q(l) W'_m(l) \sin \phi_j + \sum_{j=1}^{N_{tot}} L \rho_b I_b \sin \beta \sin \phi_j W'_q(l) W'_m(l) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{N_{tot}} L \rho_b I_y \cos \beta \sin \phi_j W'_q(l) W'_m(l) + \sum_{j=1}^{N_{tot}} L \rho_b I_z \cos \phi_j W'_q(l) W'_m(l) \\
& \vdots
\end{aligned} \tag{C.10}$$



$$\begin{aligned}
& \vdots \\
\mathbf{M}_{rotor}(2m+2, 2m_{tot}+c+(j-1)n_{tot}) &= \int_0^L \rho_b A_b Y_{c-2}(s) ds W_m(l) \cos \beta \cos \phi_j \\
&+ \int_0^L \rho_b A_b Y_{c-2}(s)(s+r) ds W'_m(l) \sin \beta \sin \phi_j + \int_0^L \rho_b I_b Y'_{c-2}(s) ds W'_m(l) \sin \beta \sin \phi_j \\
\mathbf{M}_{rotor}(2m_{tot}+p+(j-1)n_{tot}, 1) &= - \int_0^L \rho_b A_b Y_{p-2}(s) ds \cos \beta \sin \phi_j \\
\mathbf{M}_{rotor}(2m_{tot}+p+(j-1)n_{tot}, 2) &= \int_0^L \rho_b A_b Y_{p-2}(s) ds \cos \beta \cos \phi_j \\
\mathbf{M}_{rotor}(2m_{tot}+p+(j-1)n_{tot}, 2q+1) &= - \int_0^L \rho_b A_b Y_{p-2}(s) ds W_q(l) \cos \beta \sin \phi_j \\
&+ \int_0^L \rho_b A_b Y_{p-2}(s)(s+r) ds W'_q(l) \sin \beta \cos \phi_j + \int_0^L \rho_b I_b Y'_{p-2}(s) ds W'_q(l) \sin \beta \cos \phi_j \\
\mathbf{M}_{rotor}(2m_{tot}+p+(j-1)n_{tot}, 2q+2) &= \int_0^L \rho_b A_b Y_{p-2}(s) ds W_q(l) \cos \beta \cos \phi_j \\
&+ \int_0^L \rho_b A_b Y_{p-2}(s)(s+r) ds W'_q(l) \sin \beta \sin \phi_j + \int_0^L \rho_b I_b Y'_{p-2}(s) ds W'_q(l) \sin \beta \sin \phi_j \\
\mathbf{M}_{rotor}(2m_{tot}+p+(j-1)n_{tot}, 2m_{tot}+c+(j-1)n_{tot}) &= \int_0^L \rho_b A_b Y_{p-2}(s) Y_{c-2}(s) ds \\
&+ \int_0^L \rho_b I_b Y'_{p-2}(s) Y'_{c-2}(s) ds
\end{aligned} \tag{C.11}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{K}}_{rotor}(1, 1) &= -M_s \Omega - M_D \Omega + \sum_{i=1}^{N_b} [S^b] - M_b N_{tot} \Omega \\
\tilde{\mathbf{K}}_{rotor}(1, 2) &= - \sum_{i=1}^{N_b} [D^b] \Omega \\
\tilde{\mathbf{K}}_{rotor}(1, 2m+1) &= - \int_0^L \rho_s A_s \Omega W_m(z) dz - M_D \Omega W_m(l) + \sum_{i=1}^{N_b} [S^b] W_m(z_i) - N_{tot} M_b \Omega W_m(l) \\
\tilde{\mathbf{K}}_{rotor}(1, 2m+2) &= - \sum_{i=1}^{N_b} [D^b] \Omega W_m(z_i) \\
\tilde{\mathbf{K}}_{rotor}(1, 2m_{tot}+c+(j-1)n_{tot}) &= \int_0^L \rho_b A_b \Omega Y_{c-2}(s) ds \cos \beta \sin \phi_j \\
\tilde{\mathbf{K}}_{rotor}(2, 1) &= \sum_{i=1}^{N_b} [D^b] \Omega \\
\tilde{\mathbf{K}}_{rotor}(2, 2) &= -M_s \Omega - M_D \Omega + \sum_{i=1}^{N_b} [S^b] - M_b N_{tot} \Omega \\
\tilde{\mathbf{K}}_{rotor}(2, 2m+1) &= \sum_{i=1}^{N_b} [D^b] \Omega W_m(z_i) \\
\tilde{\mathbf{K}}_{rotor}(2, 2m+2) &= - \int_0^L \rho_s A_s \Omega W_m(z) dz - M_D \Omega W_m(l) + \sum_{i=1}^{N_b} [S^b] W_m(z_i) - N_{tot} M_b \Omega W_m(l) \\
\tilde{\mathbf{K}}_{rotor}(2, 2m_{tot}+c+(j-1)n_{tot}) &= - \int_0^L \rho_b A_b \Omega Y_{c-2}(s) ds \cos \beta \cos \phi_j \\
& \vdots
\end{aligned}$$

⋮

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{K}}_{rotor}(2m+1, 1) &= - \int_0^L \rho_s A_s \Omega W_m(z) dz - M_D \Omega W_m(l) + \sum_{i=1}^{N_b} [S^b] W_m(z_i) - N_{tot} M_b \Omega W_m(l) \\
\tilde{\mathbf{K}}_{rotor}(2m+1, 2) &= - \sum_{i=1}^{N_b} [D^b] \Omega W_m(z_i) \\
\tilde{\mathbf{K}}_{rotor}(2m+1, 2q+1) &= - \int_0^L \rho_s A_s \Omega W_q(z) W_m(z) dz - \int_0^l \rho_s (I_{s_x} - I_s^{pol}) \Omega W'_q(z) W'_m(z) dz - M_D \Omega W_q(l) W_m(l) \\
&\quad - (J_{D_x}^{diam} - J_D^{pol}) \Omega W'_q(l) W'_m(l) + \int_0^l E_s I_s W''_q(z) W''_m(z) dz + \sum_{i=1}^{N_b} [S^b] W_q(z_i) W_m(z_i) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{N_b} B^b W'_q(z_i) W'_m(z_i) - N_{tot} M_b \Omega W_q(l) W_m(l) + \sum_{j=1}^{N_{tot}} M_b \Omega \left\{ r + Lr + \frac{L}{3} \right\} W'_q(l) W'_m(l) \cos \phi_j \\
&\quad + \sum_{j=1}^{N_{tot}} L \rho_b I_b \Omega \cos \beta W'_q(l) W'_m(l) - \sum_{j=1}^{N_{tot}} L \rho_b I_b \Omega \sin \beta \sin \phi_j W'_q(l) W'_m(l) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{N_{tot}} L \rho_b I_y \Omega \sin \beta W'_q(l) W'_m(l) - \sum_{j=1}^{N_{tot}} L \rho_b I_y \Omega \cos \beta \sin \phi_j W'_q(l) W'_m(l) \\
&\quad - \sum_{j=1}^{N_{tot}} L \rho_b I_z \Omega \cos \phi_j W'_q(l) W'_m(l) \\
\tilde{\mathbf{K}}_{rotor}(2m+1, 2q+2) &= - \sum_{i=1}^{N_b} [D^b] \Omega W_q(z_i) W_m(z_i) + \sum_{j=1}^{N_{tot}} M_b \Omega \left\{ r + Lr + \frac{L}{3} \right\} W'_q(l) W'_m(l) \cos \phi_j \sin \phi_j \\
&\quad + \sum_{j=1}^{N_{tot}} L \rho_b I_b \Omega \sin \beta \sin \phi_j \cos \phi_j W'_q(l) W'_m(l) + \sum_{j=1}^{N_{tot}} L \rho_b I_y \Omega \cos \beta \sin \phi_j \cos \phi_j W'_q(l) W'_m(l) \\
&\quad - \sum_{j=1}^{N_{tot}} L \rho_b I_z \Omega \cos \phi_j \sin \phi_j W'_q(l) W'_m(l) \\
\tilde{\mathbf{K}}_{rotor}(2m+1, 2m_{tot} + c + (j-1)n_{tot}) &= \int_0^L \rho_b A_b \Omega Y_{c-2}(s) ds W_m(l) \cos \beta \sin \phi_j + \\
_{h\ space 4em} \int_0^L \rho_b A_b \Omega Y_{c-2}(s) (s+r) ds W'_m(l) \sin \beta \cos \phi_j &+ \int_0^L \rho_b I_y \Omega Y'_{c-2}(s) ds W'_m(l) \sin \beta \cos \phi_j \\
&- \int_0^L \rho_b I_z \Omega Y'_{c-2}(s) ds W'_m(l) \sin \beta \cos \phi_j \\
\tilde{\mathbf{K}}_{rotor}(2m+2, 1) &= \sum_{i=1}^{N_b} [D^b] \Omega W_m(z_i) \\
\tilde{\mathbf{K}}_{rotor}(2m+2, 2) &= - \int_0^L \rho_s A_s \Omega W_m(z) dz - M_D \Omega W_m(l) + \sum_{i=1}^{N_b} [S^b] W_m(z_i) - N_{tot} M_b \Omega W_m(l) \\
\tilde{\mathbf{K}}_{rotor}(2m+2, 2q+1) &= \sum_{i=1}^{N_b} [D^b] \Omega W_q(z_i) W_m(z_i) + \sum_{j=1}^{N_{tot}} M_b \Omega \left\{ r + Lr + \frac{L}{3} \right\} W'_q(l) W'_m(l) \cos \phi_j \sin \phi_j \\
&\quad + \sum_{j=1}^{N_{tot}} L \rho_b I_b \Omega \sin \beta \sin \phi_j \cos \phi_j W'_q(l) W'_m(l) + \sum_{j=1}^{N_{tot}} L \rho_b I_y \Omega \cos \beta \sin \phi_j \cos \phi_j W'_q(l) W'_m(l) \\
&\quad - \sum_{j=1}^{N_{tot}} L \rho_b I_z \Omega \cos \phi_j \sin \phi_j W'_q(l) W'_m(l) \\
\tilde{\mathbf{K}}_{rotor}(2m+2, 2q+2) &= - \int_0^L \rho_s A_s \Omega W_q(z) W_m(z) dz - \int_0^l \rho_s (I_{s_y} - I_s^{pol}) \Omega W'_q(z) W'_m(z) dz - M_D \Omega W_q(l) W_m(l) \\
&\quad - (J_{D_y}^{diam} - J_D^{pol}) \Omega W'_q(l) W'_m(l) + \int_0^l E_s I_s W''_q(z) W''_m(z) dz + \sum_{i=1}^{N_b} [S^b] W_q(z_i) W_m(z_i) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{N_b} B^b W'_q(z_i) W'_m(z_i) - N_{tot} M_b \Omega W_q(l) W_m(l) + \sum_{j=1}^{N_{tot}} M_b \Omega \left\{ r + Lr + \frac{L}{3} \right\} W'_q(l) W'_m(l) \sin \phi_j \\
&\quad + \sum_{j=1}^{N_{tot}} L \rho_b I_b \Omega \cos \beta W'_q(l) W'_m(l) - \sum_{j=1}^{N_{tot}} L \rho_b I_b \Omega \sin \beta \cos \phi_j W'_q(l) W'_m(l) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{N_{tot}} L \rho_b I_y \Omega \sin \beta W'_q(l) W'_m(l) - \sum_{j=1}^{N_{tot}} L \rho_b I_y \Omega \cos \beta \cos \phi_j W'_q(l) W'_m(l) \\
&\quad - \sum_{j=1}^{N_{tot}} L \rho_b I_z \Omega \sin \phi_j W'_q(l) W'_m(l)
\end{aligned}$$

⋮

$$\begin{aligned}
& \vdots \\
\tilde{\mathbf{K}}_{rotor}(2m+2, 2m_{tot}+c+(j-1)n_{tot}) &= -\int_0^L \rho_b A_b \Omega Y_{c-2}(s) ds W_m(l) \cos \beta \cos \phi_j \\
&+ \int_0^L \rho_b A_b \Omega Y_{c-2}(s)(s+r) ds W'_m(l) \sin \beta \sin \phi_j + \int_0^L \rho_b I_y \Omega Y'_{c-2}(s) ds W'_m(l) \sin \beta \sin \phi_j \\
&- \int_0^L \rho_b I_z \Omega Y'_{c-2}(s) ds W'_m(l) \sin \beta \sin \phi_j \\
\tilde{\mathbf{K}}_{rotor}(2m_{tot}+c+(j-1)n_{tot}, 1) &= \int_0^L \rho_b A_b \Omega Y_{p-2}(s) ds \cos \beta \sin \phi_j \\
\tilde{\mathbf{K}}_{rotor}(2m_{tot}+c+(j-1)n_{tot}, 2) &= -\int_0^L \rho_b A_b \Omega Y_{p-2}(s) ds \cos \beta \cos \phi_j \\
\tilde{\mathbf{K}}_{rotor}(2m_{tot}+c+(j-1)n_{tot}, 2q+1) &= \int_0^L \rho_b A_b \Omega Y_{p-2}(s) ds W_q(l) \cos \beta \sin \phi_j \\
&+ \int_0^L \rho_b A_b \Omega Y_{p-2}(s)(s+r) ds W'_q(l) \sin \beta \cos \phi_j + \int_0^L \rho_b I_y \Omega Y'_{p-2}(s) ds W'_q(l) \sin \beta \cos \phi_j \\
&- \int_0^L \rho_b I_z \Omega Y'_{p-2}(s) ds W'_q(l) \sin \beta \cos \phi_j \quad (\text{C.12}) \\
\tilde{\mathbf{K}}_{rotor}(2m_{tot}+c+(j-1)n_{tot}, 2q+2) &= -\int_0^L \rho_b A_b \Omega Y_{p-2}(s) ds W_q(l) \cos \beta \cos \phi_j \\
&+ \int_0^L \rho_b A_b \Omega Y_{p-2}(s)(s+r) ds W'_q(l) \sin \beta \sin \phi_j + \int_0^L \rho_b I_y \Omega Y'_{p-2}(s) ds W'_q(l) \sin \beta \sin \phi_j \\
&- \int_0^L \rho_b I_z \Omega Y'_{p-2}(s) ds W'_q(l) \sin \beta \sin \phi_j \\
\tilde{\mathbf{K}}_{rotor}(2m_{tot}+p+(j-1)n_{tot}, 2m_{tot}+c+(j-1)n_{tot}) &= -\int_0^L \rho_b A_b \Omega Y_{p-2}(s) Y_{c-2}(s) ds \cos \beta \\
&+ \int_0^L E_b I_b Y''_{p-2}(s) Y''_{c-2}(s) ds + \int_0^L \rho_b A_b \Omega \frac{R-(s+r)}{2} Y'_{p-2}(s) Y'_{c-2}(s) ds \\
&+ \int_0^L \rho_b I_y \Omega Y'_{c-2}(s) Y'_{p-2}(s) ds \sin \beta - \int_0^L \rho_b I_z \Omega Y'_{c-2}(s) Y'_{p-2}(s) ds \sin \beta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{C}}_{rotor}(1, 1) &= \sum_{i=1}^{N_b} [D^b] \\
\tilde{\mathbf{C}}_{rotor}(1, 2) &= -2M_s \Omega - 2M_D \Omega - 2M_b N_{tot} \Omega \\
\tilde{\mathbf{C}}_{rotor}(1, 2m+1) &= \sum_{i=1}^{N_b} [D^b] W_m(z_i) \\
\tilde{\mathbf{C}}_{rotor}(1, 2m+2) &= -2 \int_0^L \rho_s A_s \Omega W_m(z) dz - 2M_D \Omega W_m(l) - 2N_{tot} M_b \Omega W_m(l) \\
\tilde{\mathbf{C}}_{rotor}(1, 2m_{tot}+c+(j-1)n_{tot}) &= -2 \int_0^L \rho_b A_b \Omega Y_{c-2}(s) ds \cos \beta \cos \phi_j \\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \vdots \\
\tilde{\mathbf{C}}_{rotor}(2, 1) &= 2M_s\Omega + 2M_D\Omega + 2M_bN_{tot}\Omega \\
\tilde{\mathbf{C}}_{rotor}(2, 2) &= \sum_{i=1}^{N_b} [D^b] \\
\tilde{\mathbf{C}}_{rotor}(2, 2m+1) &= 2 \int_0^L \rho_s A_s \Omega W_m(z) dz + 2M_D \Omega W_m(l) + 2N_{tot} M_b \Omega W_m(l) \\
\tilde{\mathbf{C}}_{rotor}(2, 2m+2) &= \sum_{i=1}^{N_b} [D^b] W_m(z_i) \\
\tilde{\mathbf{C}}_{rotor}(2, 2m_{tot} + c + (j-1)n_{tot}) &= -2 \int_0^L \rho_b A_b \Omega Y_{c-2}(s) ds \cos \beta \sin \phi_j \\
\\
\tilde{\mathbf{C}}_{rotor}(2m+1, 1) &= \sum_{i=1}^{N_b} [D^b] W_m(z_i) \\
\tilde{\mathbf{C}}_{rotor}(2m+1, 2) &= -2 \int_0^L \rho_s A_s \Omega W_m(z) dz - 2M_D \Omega W_m(l) - 2N_{tot} M_b \Omega W_m(l) \\
\tilde{\mathbf{C}}_{rotor}(2m+1, 2q+1) &= \sum_{i=1}^{N_b} [D^b] W_q(z_i) W_m(z_i) + \int_0^l \eta_s E_s I_s \Omega W_q''(z) W_m''(z) dz \\
\tilde{\mathbf{C}}_{rotor}(2m+1, 2q+2) &= -2 \int_0^L \rho_s A_s \Omega W_q(z) W_m(z) dz - \int_0^l \rho_s (I_{s_y} + I_{s_x}) \Omega W_q'(z) W_m'(z) dz \\
&\quad - 2M_D \Omega W_q(l) W_m(l) - 2(J_{D_y}^{diam} + J_{D_x}^{diam}) \Omega W_q'(l) W_m'(l) + \int_0^l \rho_s I_s^{pol} \Omega W_q'(z) W_m'(z) dz \\
&\quad + J_D^{pol} \Omega W_q'(l) W_m'(l) - 2N_{tot} M_b \Omega W_q(l) W_m(l) - \sum_{j=1}^{N_{tot}} L \rho_b I_b \Omega \sin \beta W_q'(l) W_m'(l) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{N_{tot}} L \rho_b I_b \Omega \cos \beta W_q'(l) W_m'(l) - \sum_{j=1}^{N_{tot}} L \rho_b I_y \Omega \cos \beta W_q'(l) W_m'(l) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{N_{tot}} L \rho_b I_y \Omega \sin \beta W_q'(l) W_m'(l) - \sum_{j=1}^{N_{tot}} L \rho_b I_z \Omega W_q'(l) W_m'(l) \\
\tilde{\mathbf{C}}_{rotor}(2m+1, 2m_{tot} + c + (j-1)n_{tot}) &= -2 \int_0^L \rho_b A_b \Omega Y_{c-2}(s) ds W_m(l) \cos \beta \cos \phi_j \\
&\quad - 2 \int_0^L \rho_b I_b \Omega Y_{c-2}'(s) ds W_m'(l) \sin \beta \sin \phi_j \\
\\
\tilde{\mathbf{C}}_{rotor}(2m+2, 1) &= 2 \int_0^L \rho_s A_s \Omega W_m(z) dz + 2M_D \Omega W_m(l) + 2N_{tot} M_b \Omega W_m(l) \\
\tilde{\mathbf{C}}_{rotor}(2m+2, 2) &= \sum_{i=1}^{N_b} [D^b] W_m(z_i) \\
\tilde{\mathbf{C}}_{rotor}(2m+2, 2q+1) &= 2 \int_0^L \rho_s A_s \Omega W_q(z) W_m(z) dz + 2 \int_0^l \rho_s (I_{s_x} + I_{s_y}) \Omega W_q'(z) W_m'(z) dz \\
&\quad + 2M_D \Omega W_q(l) W_m(l) + 2(J_{D_x}^{diam} + J_{D_y}^{diam}) \Omega W_q'(l) W_m'(l) - \int_0^l \rho_s I_s^{pol} \Omega W_q'(z) W_m'(z) dz \\
&\quad - J_D^{pol} \Omega W_q'(l) W_m'(l) + 2N_{tot} M_b \Omega W_q(l) W_m(l) + \sum_{j=1}^{N_{tot}} L \rho_b I_b \Omega \sin \beta W_q'(l) W_m'(l) \\
&\quad - \sum_{j=1}^{N_{tot}} L \rho_b I_b \Omega \cos \beta W_q'(l) W_m'(l) + \sum_{j=1}^{N_{tot}} L \rho_b I_y \Omega \cos \beta W_q'(l) W_m'(l) \\
&\quad - \sum_{j=1}^{N_{tot}} L \rho_b I_y \Omega \sin \beta W_q'(l) W_m'(l) + \sum_{j=1}^{N_{tot}} L \rho_b I_z \Omega W_q'(l) W_m'(l) \\
\tilde{\mathbf{C}}_{rotor}(2m+2, 2q+2) &= \sum_{i=1}^{N_b} [D^b] W_q(z_i) W_m(z_i) + \int_0^l \eta_s E_s I_s \Omega W_q''(z) W_m''(z) dz \\
\tilde{\mathbf{C}}_{rotor}(2m+2, 2m_{tot} + c + (j-1)n_{tot}) &= -2 \int_0^L \rho_b A_b \Omega Y_{c-2}(s) ds W_m(l) \cos \beta \sin \phi_j \\
&\quad + 2 \int_0^L \rho_b I_b \Omega Y_{c-2}'(s) ds W_m'(l) \sin \beta \cos \phi_j \\
& \vdots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \vdots \\
\tilde{\mathbf{C}}_{rotor}(2m_{tot} + c + (j-1)n_{tot}, 1) &= 2 \int_0^L \rho_b A_b \Omega Y_{p-2}(s) ds \cos \beta \cos \phi_j \\
\tilde{\mathbf{C}}_{rotor}(2m_{tot} + c + (j-1)n_{tot}, 2) &= 2 \int_0^L \rho_b A_b \Omega Y_{p-2}(s) ds \cos \beta \sin \phi_j \\
\tilde{\mathbf{C}}_{rotor}(2m_{tot} + c + (j-1)n_{tot}, 2m+1) &= 2 \int_0^L \rho_b A_b \Omega Y_{p-2}(s) ds W_q(l) \cos \beta \cos \phi_j \\
&\quad + 2 \int_0^L \rho_b I_b \Omega Y'_{p-2}(s) ds W'_q(l) \sin \beta \sin \phi_j \\
\tilde{\mathbf{C}}_{rotor}(2m_{tot} + c + (j-1)n_{tot}, 2m+2) &= 2 \int_0^L \rho_b A_b \Omega Y_{p-2}(s) ds W_q(l) \cos \beta \sin \phi_j \\
&\quad - 2 \int_0^L \rho_b I_b \Omega Y'_{p-2}(s) ds W'_q(l) \sin \beta \cos \phi_j \\
\tilde{\mathbf{C}}(2m_{tot} + p + (j-1)n_{tot}, 2m_{tot} + c + (j-1)n_{tot}) &= \int_0^L \eta_b E_b I_b Y''_{p-2}(s) Y''_{c-2}(s) ds
\end{aligned} \tag{C.13}$$

## Annexe D

# Modèle de carter flexible

### D.1 Energies et potentiels associés au modèle

On peut donner, à titre indicatif, les expressions usuelles des énergies cinétique et interne de déformations élastiques d'un anneau flexible, ainsi que celle d'une fonction de dissipation permettant de prendre en compte un amortissement de type visqueux, formulées dans un repère fixe [90, 34] :

$$T_{stat}^* = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \rho_{stat} S_{stat} (\dot{u}_s^*(\theta, t) + \dot{w}^*(\theta, t)) R_{stat} d\theta \quad (D.1)$$

$$\begin{aligned} \nu_{stat}^* = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{E_{stat} I_{stat}}{R_{stat}^3} \left\{ \frac{\partial u_s^*}{\partial \theta}(\theta, t) + \frac{\partial w^*}{\partial \theta}(\theta, t) \right\}^2 d\theta \\ + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{E_{stat} S_{stat}}{R_{stat}} \left\{ \frac{\partial w^*}{\partial \theta}(\theta, t) - u_s^*(\theta, t) \right\}^2 d\theta \quad (D.2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{dstat}^* = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \eta_{stat} \frac{E_{stat} I_{stat}}{R_{stat}^3} \left\{ \frac{\partial \dot{u}_s^*}{\partial \theta}(\theta, t) + \frac{\partial \dot{w}^*}{\partial \theta}(\theta, t) \right\}^2 d\theta \\ + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \eta_{stat} \frac{E_{stat} S_{stat}}{R_{stat}} \left\{ \frac{\partial \dot{w}^*}{\partial \theta}(\theta, t) - \dot{u}_s^*(\theta, t) \right\}^2 d\theta \quad (D.3) \end{aligned}$$

Afin de modéliser les structures dans le repère corotationnel, on introduit le changement de variable  $\phi = \theta - \Omega t$ . Les équations D.1, D.2 et D.3 s'expriment alors, comme nous l'avons déjà précisé au chapitre 5 (équations 5.7, 5.8), par :

$$T_{stat} = \frac{1}{2} \int_{-\Omega t}^{2\pi - \Omega t} \rho_{stat} S_{stat} \left\{ \left[ \dot{u}_s(\phi, t) - \Omega \frac{\partial u_s}{\partial \phi}(\phi, t) \right]^2 + \left[ \dot{w}(\phi, t) - \Omega \frac{\partial w}{\partial \phi}(\phi, t) \right]^2 \right\} R_{stat} d\phi \quad (D.4)$$

$$\nu_{stat} = \frac{1}{2} \int_{-\Omega t}^{2\pi - \Omega t} \frac{E_{stat} I_{stat}}{R_{stat}^3} \left\{ \frac{\partial u_s}{\partial \phi}(\phi, t) + \frac{\partial w}{\partial \phi}(\phi, t) \right\}^2 d\phi \quad (D.5)$$

$$F_{dstat} = \frac{1}{2} \int_{-\Omega t}^{2\pi - \Omega t} \eta_{stat} \frac{E_{stat} I_{stat}}{R_{stat}^3} \left\{ -\Omega \frac{\partial^3 u_s}{\partial \phi^3}(\phi, t) + \frac{\partial^2 \dot{u}_s}{\partial \phi^2}(\phi, t) - \Omega \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2}(\phi, t) + \frac{\partial \dot{w}}{\partial \phi}(\phi, t) \right\}^2 d\phi \quad (D.6)$$

## D.2 Equation matricielle

L'application des équations de Lagrange aux éléments précédents, aboutit à l'équation matricielle du comportement dynamique du système dans le repère tournant, dont les matrices contiennent les termes suivants, avec  $m \in [2, k_{tot}]$  et  $k \in [2, k_{tot}]$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{stat}(2m-3, 2k-3) &= \rho_{stat} S_{stat} R_{stat} \pi (1 + km) \delta(k-m) \\ \mathbf{M}_{stat}(2m-3, 2k-2) &= 0 \\ \mathbf{M}_{stat}(2m-2, 2k-3) &= 0 \\ \mathbf{M}_{stat}(2m-2, 2k-2) &= \rho_{stat} S_{stat} R_{stat} \pi (1 + km) \delta(k-m) \end{aligned} \quad (D.7)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{K}}_{stat}(2m-3, 2k-3) &= \frac{E_{stat} I_{stat}}{R_{stat}^3} (k^3 - k) (m^3 - m) \pi \delta(k-m) \\ &\quad - \rho_{stat} S_{stat} R_{stat} \Omega \pi (km + km) \delta(k-m) \\ \tilde{\mathbf{K}}_{stat}(2m-3, 2k-2) &= \eta_{stat} \frac{E_{stat} I_{stat}}{R_{stat}^3} \Omega (k^2 - k^4) (m^3 - m) \pi \delta(k-m) \\ \tilde{\mathbf{K}}_{stat}(2m-2, 2k-3) &= \eta_{stat} \frac{E_{stat} I_{stat}}{R_{stat}^3} \Omega (k^2 - k^4) (m - m^3) \pi \delta(k-m) \\ \tilde{\mathbf{K}}_{stat}(2m-2, 2k-2) &= \frac{E_{stat} I_{stat}}{R_{stat}^3} (k - k^3) (m - m^3) \pi \delta(k-m) \\ &\quad - \rho_{stat} S_{stat} R_{stat} \Omega \pi (km + km) \delta(k-m) \end{aligned} \quad (D.8)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{C}}_{stat}(2m-3, 2k-3) &= \eta_{stat} \frac{E_{stat} I_{stat}}{R_{stat}^3} (k^3 - k) (m^3 - m) \pi \delta(k-m) \\ \tilde{\mathbf{C}}_{stat}(2m-3, 2k-2) &= -\{\rho_{stat} S_{stat} R_{stat} \Omega \pi m (k+1) \\ &\quad + \rho_{stat} S_{stat} R_{stat} \Omega \pi k (m+1)\} \delta(k-m) \\ \tilde{\mathbf{C}}_{stat}(2m-2, 2k-3) &= \{\rho_{stat} S_{stat} R_{stat} \Omega \pi m (k+1) \\ &\quad + \rho_{stat} S_{stat} R_{stat} \Omega \pi k (m+1)\} \delta(k-m) \\ \tilde{\mathbf{C}}_{stat}(2m-2, 2k-2) &= \eta_{stat} \frac{E_{stat} I_{stat}}{R_{stat}^3} (k - k^3) (m - m^3) \pi \delta(k-m) \end{aligned} \quad (D.9)$$